

AB: Aufgaben Ebenen höheres Niveau

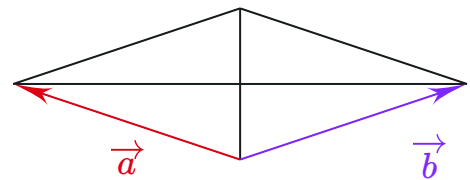
Mathematik Vektoren

① Geben sind die Punkte $A(3/1/-2)$; $B(5/0/0)$; $C(6/2/0)$ und $D(4/3/-2)$

- Zeige, dass das Viereck ABCD ein ebenes Viereck ist, also ein Viereck, dass in einer Ebene liegt. Erläutere deinen Lösungsweg.
- Zeige, dass das Viereck ABCD ein Rechteck ist.

② Untersuche, ob das Dreieck ABC mit $A(3/7/-4)$; $B(7/7/-1)$ und $C(0/7/0)$ rechtwinklig, gleichschenkelig oder gleichseitig ist.

③ Eine Raute kann durch zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ beschrieben werden.



- Welche Bedingungen müssen für vier Punkte A, B, C, D in einem dreidimensionalen Raum gelten, damit das Viereck ABCD eine Raute ist?
- Gib vier Punkte A, B, C, D in einem dreidimensionalen Raum an, so dass das Viereck ABCD eine Raute ist. Zeige rechnerisch, dass die Bedingungen für eine Raute erfüllt sind.
- Zeige, dass die Diagonalen in jeder Raute orthogonal zueinander sind. Stelle dazu die Diagonalen mithilfe von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dar und verwende das Skalarprodukt.

④ a) Begründe, dass die Parameterdarstellung keine Ebene beschreibt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ -12 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Ändere den zweiten Richtungsvektor so, dass durch die Parameterdarstellung eine Ebene bestimmt wird, die den Punkt $P(0/0/-9)$ enthält.



⑤ Gib jeweils eine Parameterdarstellung der Ebene an, die

- durch die x_1 - und x_2 -Achse aufgespannt wird
- durch $P(3/1/-2)$ verläuft und parallel zur x_1x_3 -Koordinatenebene ist
- die x_1 -Achse an der Stelle 3, die x_2 -Achse an der Stelle 1 und die x_3 -Achse an der Stelle -1 schneidet.

⑥ Prüfe, ob es eine Ebene gibt, in der die Geraden g und h liegen. Falls ja, gib eine Parametergleichung der Ebene an.

$$\begin{aligned}
 & \bullet g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} & h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -16 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\
 & \bullet g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} & h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 & \bullet g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \\
 & \bullet g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -0.5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} & h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ -5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

⑦ Gegeben sind die Punkte $A(3/0/-3)$; $B(3/5/-3)$ und $D(-1/0/0)$

- Berechne die Koordinaten des Punktes C, so dass ABCD ein Parallelogramm ist.
- Zeige: Das Viereck ABCD ist ein Quadrat.
- Berechne die Koordinaten des Mittelpunktes M des Quadrates ABCD.
- Zeige, dass M auf der Gerade h liegt, die durch $S(5,8/2,5/4,9)$ verläuft und den Rich-

tungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0 \\ 0,8 \end{pmatrix}$ hat.

- Zeichne die Punkte A, B, C, D, und S in ein Koordinatensystem und Verbinde sie zu einer Pyramide. Zeichne auch den Punkt M ein.
- Zeige, dass S von den vier Eckpunkten des Quadrates gleichweit entfernt ist. Erläutere die Bedeutung der Strecke $\overline{MS}$ für die Pyramide ABCDS.
- Berechne das Volumen der Pyramide ABCDS.