AB: Aufgaben Ebenen höheres Niveau

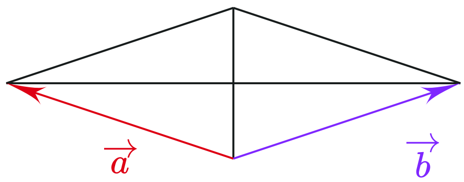
Mathematik Vektoren

① Geben sind die Punkte $A(3/1/-2)$; $B(5/0/0)$; $C(6/2/0)$ und $D(4/3/-2)$

a) Zeige, dass das Viereck ABCD ein ebenes Viereck ist, also ein Viereck, dass in einer Ebene liegt. Erläutere deinen Lösungsweg.
b) Zeige, dass das Viereck ABCD ein Rechteck ist.

② Untersuche, ob das Dreieck ABC mit $A(3/7/-4)$; $B(7/7/-1)$ und $C(0/7/0)$ rechtwinklig, gleichschenklig oder gleichseitig ist.

③ Eine Raute kann durch zwei Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ mit $|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}|$ beschrieben werden.



a) Welche Bedingungen müssen für vier Punkte A, B, C, D in einem dreidimensionalen Raum gelten, damit das Viereck ABCD eine Raute ist?
b) Gib vier Punkte A, B, C, D in einem dreidimansionalen Raum an, so dass das Viereck ABCD eine Raute ist. Zeige rechnerisch, dass die Bedingungen für eine Raute erfüllt sind.
c) Zeige, dass die Diagonalen in jeder Raute orthogonal zueinander sind. Stelle dazu die Diagonalen mithilfe von $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ dar und verwende das Skalarprodukt.

④ a) Begründe, dass die Parameterdarstellung keine Ebene beschreibt:

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ -12 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) Ändere den zweiten Richtungsvektor so, dass durch die Parameterdarstellung eine Ebene bestimmt wird, die den Punkt $P(0/0/-9)$ enthält.

⑤ Gib jeweils eine Parameterdarstellung der Ebene an, die

a) durch die x_1-und x_2-Achse aufgespannt wird

b) durch $P(3/1/-2)$ verläuft und parallel zur x_1x_3-Koordinatenebene ist

c) die x_1-Achse an der Stelle 3, die x_2-Achse an der Stelle 1 und die x_3-Achse an der Stelle -1 schneidet.

⑥ Prüfe, ob es eine Ebene gibt, in der die Geraden g und h liegen. Falls ja, gib eine Parametergleichung der Ebene an.

- $g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad h: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -16 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$
- $g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad h: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad h: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$
- $g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -0.5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad h: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ -5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

⑦ Gegeben sind die Punkte $A(3/0/-3)$; $B(3/5/-3)$ und $D(-1/0/0)$

a) Berechne die Koordinaten des Punktes C, so dass ABCD ein Parallelogramm ist.

b) Zeige: Das Viereck ABCD ist ein Quadrat.

c) Berechne die Koordinaten des Mittelpunktes M des Quadrates ABCD.

d) Zeige, dass M auf der Gerade h liegt, die durch $S(5{,}8/2{,}5/4{,}9)$ verläuft und den Richtungsvektor $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$ hat.

e) Zeichne die Punkte A, B, C, D, und S in ein Koordinatensystem und Verbinde sie zu einer Pyramide. Zeichne auch den Punkt M ein.

f) Zeige, dass S von den vier Eckpunkten des Quadrates gleichweit entfernt ist. Erläutere die Bedeutung der Strecke $\overline{MS}$ für die Pyramide ABCDS.

g) Berechne das Volumen der Pyramide ABCDS.