

INPUT: Einen Normalenvektor bestimmen

Mathematik Vektoren 12



Wo stehe ich?

⇒ Was ist ein Normalenvektor?

⇒ Berechne das Skalarprodukt: $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Den Normalenvektor einer Ebene aus der Parameterform bestimmen

Ein **Normalenvektor** steht **senkrecht (orthogonal)** auf einer Ebene. Das bedeutet, er ist **rechtwinklig** zu allen Vektoren, die **in der Ebene liegen** – z.B. den beiden **Spannvektoren** $\vec{u}$ und $\vec{v}$, die die Ebene beschreiben.

Da das **Skalarprodukt** für Vektoren, die senkrecht aufeinander stehen immer **null** ist, muss also gelten:

$$\vec{n} \circ \vec{u} = 0 \text{ und } \vec{n} \circ \vec{v} = 0$$

Wie geht man vor?

Beispiel:

Gegeben ist die Ebene: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Gesucht: ein Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$, der **orthogonal zu beiden Spannvektoren** ist.



Mathematik Vektoren 12

[illegible][illegible]

INPUT: Einen Normalenvektor bestimmen

Mathematik Vektoren 12

Was ist ein Vektorprodukt?

Das Vektorprodukt, das auch **Kreuzprodukt** genannt wird, ist eine mathematische Verknüpfung von zwei Vektoren. Dabei werden die Koordinaten der beteiligten Vektoren in einem Kreuzmuster multipliziert und anschließend subtrahiert. Das Ergebnis einer Vektormultiplikation ist im Vergleich zur Skalarmultiplikation ein Vektor. Das Rechenzeichen für das Vektorprodukt ist ein Kreuz $\times$.

Wie wird ein Vektorprodukt berechnet?

Die Formel für die Berechnung des Vektorproduktes von Vektoren lautet:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Vektorprodukte können nur für Vektoren mit drei Koordinaten berechnet werden. Eine Berechnung des Vektorproduktes für einen Vektor mit zwei Koordinaten ist nicht möglich.

Beispiel

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 - 6 \cdot (-2) \\ 6 \cdot (-1) - 1 \cdot 5 \\ 1 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 27 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- ③ Schau dir die Formel zur Berechnung des Vektorproduktes genau an. Gib eine mögliche Begründung an, warum das Vektorprodukt von Vektoren mit zwei Koordinaten nicht berechnet werden kann.



Mathematik Vektoren 12

Die Formel für das Vektorprodukt sieht auf den ersten Blick etwas kompliziert aus. Mit den folgenden Schritten lässt sich das Vektorprodukt dennoch schnell und einfach berechnen.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

1			-1
3			-2
6			5
1			-1
3			-2
6			5

1			-1
3			-2
6			5
1			-1
3			-2
6			5

A 6x6 grid with numbers 1, 3, 6, 1, 3, 6 in the first column and -1, -2, 5, -1, -2, 5 in the sixth column. Colored lines connect the numbers in the first column to the numbers in the sixth column: a blue line connects 1 to -1, an orange line connects 3 to -2, a green line connects 6 to 5, a red line connects 1 to -1, a blue line connects 3 to -2, and a green line connects 6 to 5.

$$\begin{array}{c|c} \begin{array}{l} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \\ 6 \end{array} & \begin{array}{l} -1 \\ -2 \\ 5 \\ -1 \\ -2 \\ 5 \end{array} \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 - 6 \cdot (-2) \\ 6 \cdot (-1) - 1 \cdot 5 \\ 1 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

INPUT: Einen Normalenvektor bestimmen

Mathematik Vektoren 12

Die geometrische Bedeutung des Vektorproduktes

Im Beispiel oben wurde das Vektorprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ berechnet. Das Vektorprodukt soll ab nun $\vec{n}$ heißen.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{a} \times \vec{b} = \vec{n} = \begin{pmatrix} 27 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

④ a) Berechne die Skalarprodukte von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit $\vec{n}$.

[illegible]

b) Wenn du dich nicht verrechnet hast, sollten die Ergebnisse gleich sein und eine Besonderheit aufweisen. Beschreibe die Besonderheit.

c) Ergänze den Merksatz zur geometrischen Bedeutung des Vektorproduktes.

Bei der Vektormultiplikation entsteht ein Vektor, der auf den beiden beteiligten Vektoren steht.





INPUT: Einen Normalenvektor bestimmen

Mathematik Vektoren 12

Lösung

Aufgabe 1

Bei der Berechnung des Vektorproduktes werden in jeder Zeile die Werte aus den anderen beiden Zeilen benötigt. In einem Vektor mit nur zwei Zeilen wäre eine solche Berechnung nicht möglich, da immer eine Zeile fehlen würde.

Aufgabe 2

$$\text{a) } \vec{a} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 27 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad \vec{b} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 27 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

b) In beiden Fällen ist das Skalarprodukt null.

c) Bei der Vektormultiplikation entsteht ein Vektor, der **senkrecht** auf den beiden beteiligten Vektoren steht.

