

INPUT: Einen Normalenvektor bestimmen

Mathematik Vektoren 12



Wo stehe ich?

⇒ Was ist ein Normalenvektor?

⇒ Berechne das Skalarprodukt: $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Den Normalenvektor einer Ebene aus der Parameterform bestimmen

Ein **Normalenvektor** steht **senkrecht (orthogonal)** auf einer Ebene. Das bedeutet, er ist **rechtwinklig** zu allen Vektoren, die **in der Ebene liegen** – z.B. den beiden **Spannvektoren** $\vec{u}$ und $\vec{v}$, die die Ebene beschreiben.

Da das **Skalarprodukt** für Vektoren, die senkrecht aufeinander stehen immer **null** ist, muss also gelten:

$$\vec{n} \circ \vec{u} = 0 \text{ und } \vec{n} \circ \vec{v} = 0$$

Wie geht man vor?

Beispiel:

Gegeben ist die Ebene: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Gesucht: ein Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$, der **orthogonal zu beiden Spannvektoren** ist.



INPUT: Einen Normalenvektor bestimmen

Mathematik Vektoren 12

Was ist ein Vektorprodukt?

Das Vektorprodukt, das auch **Kreuzprodukt** genannt wird, ist eine mathematische Verknüpfung von zwei Vektoren. Dabei werden die Koordinaten der beteiligten Vektoren in einem Kreuzmuster multipliziert und anschließend subtrahiert. Das Ergebnis einer Vektormultiplikation ist im Vergleich zur Skalarmultiplikation ein Vektor. Das Rechenzeichen für das Vektorprodukt ist ein Kreuz $\times$.

Wie wird ein Vektorprodukt berechnet?

Die Formel für die Berechnung des Vektorproduktes von Vektoren lautet:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Vektorprodukte können nur für Vektoren mit drei Koordinaten berechnet werden. Eine Berechnung des Vektorproduktes für einen Vektor mit zwei Koordinaten ist nicht möglich.

Beispiel

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 - 6 \cdot (-2) \\ 6 \cdot (-1) - 1 \cdot 5 \\ 1 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 27 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- ③ Schau dir die Formel zur Berechnung des Vektorproduktes genau an. Gib eine mögliche Begründung an, warum das Vektorprodukt von Vektoren mit zwei Koordinaten nicht berechnet werden kann.



INPUT: Einen Normalenvektor bestimmen

Mathematik Vektoren 12

⚡ Rechenrick: Das Vektorprodukt schnell und einfach berechnen

Die Formel für das Vektorprodukt sieht auf den ersten Blick etwas kompliziert aus. Mit den folgenden Schritten lässt sich das Vektorprodukt dennoch schnell und einfach berechnen.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(1) Schreibe beide Vektoren ohne Klammern jeweils zweimal untereinander.

1			-1
3			-2
6			5
1			-1
3			-2
6			5

(2) Streiche die obere und die untere Zeile durch.

1			-1
3			-2
6			5
1			-1
3			-2
6			5

(3) Verbinde nun die restlichen Zahlen mit drei Kreuzen.

1			-1
3			-2
6			5
1			-1
3			-2
6			5

(4) Jedes Kreuz steht für eine Zeile im Vektor, die berechnet wird. Multipliziere die verbundenen Zahlen miteinander. Ziehe dann in jeder Zeile das zweite Produkt vom ersten Produkt ab.

1			-1
3			-2
6			5
1			-1
3			-2
6			5

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 - 6 \cdot (-2) \\ 6 \cdot (-1) - 1 \cdot 5 \\ 1 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix}$$



INPUT: Einen Normalenvektor bestimmen

Mathematik Vektoren 12

Die geometrische Bedeutung des Vektorproduktes

Im Beispiel oben wurde das Vektorprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ berechnet. Das Vektorprodukt soll ab nun $\vec{n}$ heißen.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{a} \times \vec{b} = \vec{n} = \begin{pmatrix} 27 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

④ a) Berechne die Skalarprodukte von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit $\vec{n}$.

[illegible]

b) Wenn du dich nicht verrechnet hast, sollten die Ergebnisse gleich sein und eine Besonderheit aufweisen. Beschreibe die Besonderheit.

c) Ergänze den Merksatz zur geometrischen Bedeutung des Vektorproduktes.

Bei der Vektormultiplikation entsteht ein Vektor, der auf den beiden beteiligten Vektoren steht.





INPUT: Einen Normalenvektor bestimmen

Mathematik Vektoren 12

Lösung

Aufgabe 1

Bei der Berechnung des Vektorproduktes werden in jeder Zeile die Werte aus den anderen beiden Zeilen benötigt. In einem Vektor mit nur zwei Zeilen wäre eine solche Berechnung nicht möglich, da immer eine Zeile fehlen würde.

Aufgabe 2

$$\text{a) } \vec{a} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 27 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad \vec{b} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 27 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

b) In beiden Fällen ist das Skalarprodukt null.

c) Bei der Vektormultiplikation entsteht ein Vektor, der **senkrecht** auf den beiden beteiligten Vektoren steht.

