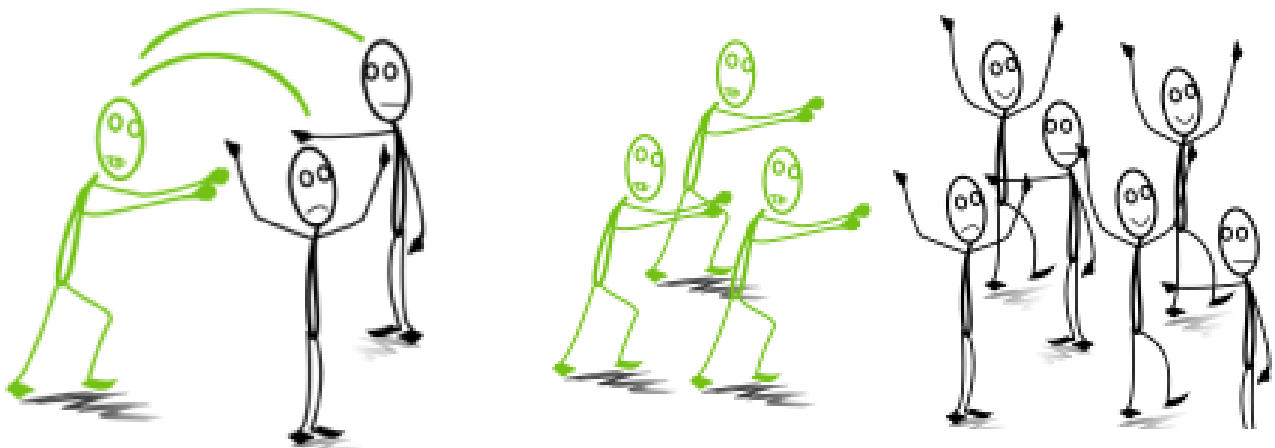


Einstieg

Plötzlich bricht die Zombieapokalypse aus! Es beginnt mit **einem einzigen** Zombie, der **pro Stunde zwei weitere** Menschen infiziert. Jeder neue Zombie tut es ihm gleich.



Frage: Wie viele Menschen sind **nach 5 Stunden** bereits zu Zombies geworden?

Überlege kurz, versuche einen Term aufzustellen und schau dir auf der nächsten Seite die Antwort an...

Antwort: Nach einer Stunde hat der erste Zombie zwei Menschen infiziert.

→ Nach einer Stunde gibt es **drei** Zombies.

In der nächsten Stunde greift jeder der drei Zombies zwei weitere Menschen an. Insgesamt sind das $3 \cdot 2 = 6$ weitere Menschen.

→ Nach zwei Stunden gibt es **neun** Zombies.

Nach drei Stunden wird es folglich $9 \cdot 2 = 18$ weitere Zombies und insgesamt 27 Zombies geben. Man erkennt, dass die Anzahlen (3, 9, 27) Dreierpotenzen sind. Es liegt daher nahe, dass die Funktionsgleichung $B(t) = 3^t$ heißt, wobei N die Anzahl der Zombies ist und t in Stunden angegeben wird.

Das Ergebnis lautet also:

Innerhalb von 5 Stunden gibt es $B(5) = 3^5 = 243$ Zombies.

Frage: Wie lange dauert es, bis ganz Europa (742,5 Millionen Menschen) zu Zombies wurde (mit Taschenrechner)? Versuche, das Ergebnis auszurechnen und schaue auf der nächsten Seite nach der Lösung!

Antwort: Gesucht ist der Zeitpunkt t , bei dem $B(t)=742.500.000$ gilt. Man setzt also den Funktions-term gleich dem gegebenen $B(t)$ und löst nach t auf:

$$742500000 = 3^t$$

Mithilfe des Taschenrechners ergibt sich:

$$\text{solve}(742500000 = 3^t, t)$$

Gib die Gleichung in deinem Taschenrechner ein und löse sie zur Wiederholung!

$$t = 18,6 \text{ Tage}$$

Auf eine ganze Zahl gerundet, lautet das Ergebnis:
Ganz Europa ist bereits nach 19 Stunden zombifiziert.

Bestimmung des Wachstums- bzw. Zerfallsfaktors

Bei exponentiellem Wachstum

Der **Wachstumsfaktor a** ergibt sich aus der **Änderungsrate**. Im Einführungsbeispiel war

$$a = 3 \quad (\text{also ist } a > 1)$$

Damit wird die Formel für das exponentielle Wachstum zu:

$$B(t) = B_0 \cdot (a)^t$$

mit

$B(t)$: Bestand zum Zeitpunkt t

$B(0)$: Anfangsbestand (also Bestand zum Zeitpunkt 0)

a : Wachstumsfaktor

t : Zeit in gegebener Einheit

Bei exponentiellem Zerfall

Der Zerfallsfaktor ergibt sich aus der Änderungsrate. Man sagt Zerfallsfaktor und nicht Wachstumsfaktor, wenn $0 < a < 1$.

Damit wird die Formel für den exponentiellen Zerfall zu:

$$B(t) = B_0 \cdot (a)^t$$

$$x=a+b$$

INFO: Gleichung exponent. Wachstums aufste...

Mathematik Gleichungen M 10

Wichtige Beispiele für Wachstums- und Zerfallsprozesse

Bakterienwachstum

Ein Bakterium **teilt** sich nach jeder Stunde in zwei **neue** Bakterien. Jedes weitere Bakterium teilt sich auch wieder jede Stunde. Wie viele Bakterien sind es nach einem Tag (=24h)?

Überlege kurz und schau dann auf der Folgeseite nach der Lösung.



$$B_0 = 1$$

$$a = 2$$

$$t_1 = 24$$

Man schreibt zunächst die gegebenen Werte auf. Gesucht ist $B(t_1) = B(24)$.

Dann setzt man in die Funktionsgleichung

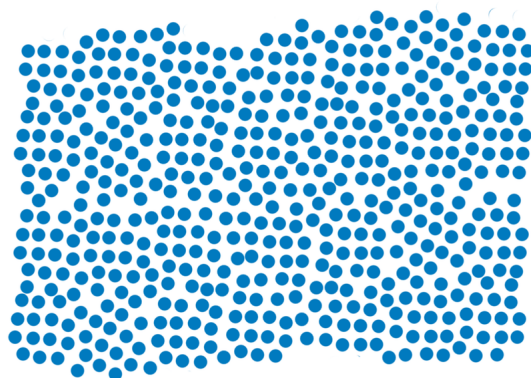
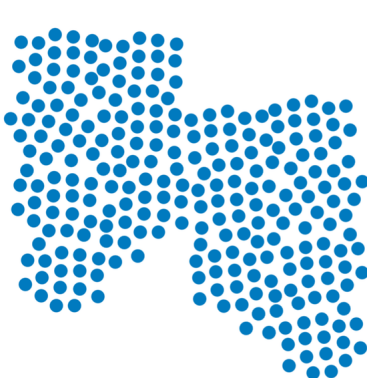
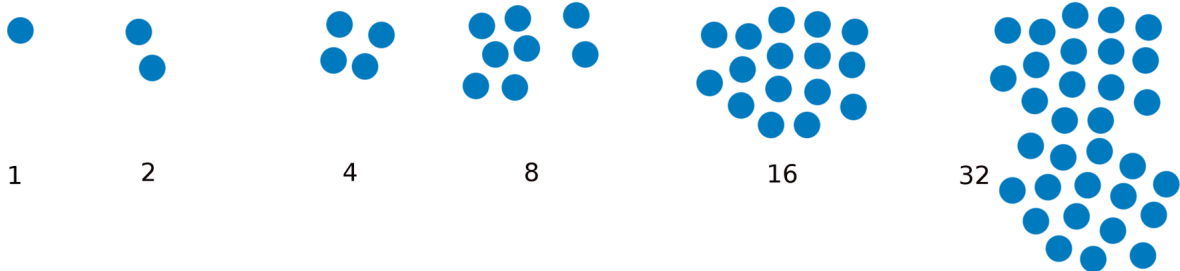
$$B(t) = B_0 \cdot a^t$$

ein und berechnet den Wert.

$$B(24) = 1 \cdot 2^{24} = 2^{24} = 16777216$$

Nach einem Tag sind es also **16777216** Bakterien.

Im Bild wird die steigende Wachstumsgeschwindigkeit anhand der zu den Bakterien gehörenden Funktionsgleichung $B(t) = 2^t$ verdeutlicht.



Zinseszinsrechnung

Man legt 500€ bei einer jährlichen Verzinsung von 3% an. Wie viel Geld hat man nach 5 Jahren?

$$B_0 = 500\text{€}$$

$$\text{Zins} = 3\% = 0,03$$

$$t_1 = 5 \text{ Jahre}$$

Man schreibt zunächst die gegebenen Werte auf. Gesucht ist $N(t_1)=N(5)$.
Dann setzt man in die Funktionsgleichung ein und berechnet den Wert.

$$B(5) = 500 \cdot (1 + 0,03)^5 = 500 \cdot (1,03)^5 = 579,64$$

Antwort: Nach 5 Jahren hat man also 579,64€.

Zerfall von Stoffen

Bei einem radioaktiven Stoff zerfällt jedes Jahr 10% der noch vorhandenen Masse. Berechne, wie viel nach 10 Jahren noch vorhanden ist.

Wenn jedes Jahr 10 % zerfallen, dann sind im Umkehrschluss nach jedem Jahr noch 90 % vom Vorjahr vorhanden. Wir bezeichnen die Masse des Stoffes im Jahr 0 mit m_0 , im Jahr 1 mit m_1 , im Jahr 2 mit m_2 ..., im Jahr 10 mit m_{10} .

Jahr	noch vorhandene Masse
0	m_0
1	$m_1 = 0,9 \cdot m_0$
2	$m_2 = 0,9 \cdot m_1 = 0,9 \cdot 0,9 \cdot m_0 = (0,9)^2 \cdot m_0$
3	$m_3 = 0,9 \cdot m_2 = 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,9 \cdot m_0 = (0,9)^3 \cdot m_0$
⋮	⋮
9	$m_9 = 0,9 \cdot m_8 = 0,9 \cdot (0,9^8 \cdot m_0) = 0,9^9 m_0$
10	$m_{10} = 0,9 \cdot m_9 = 0,9 \cdot (0,9^9 \cdot m_0) = 0,9^{10} \cdot m_0$

$$m_{10} = 0,9 \cdot m_9 = 0,9^{10} \cdot m_0 \approx 0,3487 \cdot m_0$$

Antwort: Nach 10 Jahren sind also etwa 34,87% des ursprünglichen Materials vorhanden.