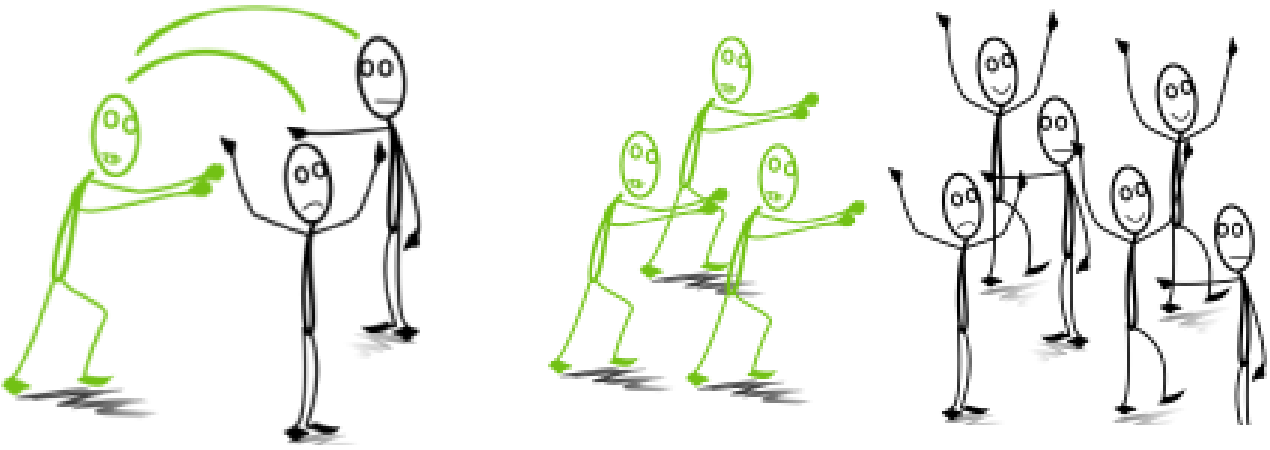
Einstieg

Plötzlich bricht die Zombieapokalypse aus! Es beginnt mit **einem einzigen** Zombie, der **pro Stunde zwei weitere** Menschen infiziert. Jeder neue Zombie tut es ihm gleich.



Frage: Wie viele Menschen sind **nach 5 Stunden** bereits zu Zombies geworden?

Überlege kurz, versuche einen Term aufzustellen und schau dir auf der nächsten Seite die Antwort an...

Antwort: Nach einer Stunde hat der erste Zombie zwei Menschen infiziert.
→ Nach einer Stunde gibt es **drei** Zombies.

In der nächsten Stunde greift jeder der drei Zombies zwei weitere Menschen an. Insgesamt sind das $3 \cdot 2 = 6$ weitere Menschen.
→ Nach zwei Stunden gibt es **neun** Zombies.

Nach drei Stunden wird es folglich $9 \cdot 2 = 18$ *weitere* Zombies und insgesamt 27 Zombies geben. Man erkennt, dass die Anzahlen (3, 9, 27) Dreierpotenzen sind. Es liegt daher nahe, dass die Funktionsgleichung $B(t) = 3^t$ heißt, wobei N die Anzahl der Zombies ist und t in Stunden angegeben wird.
Das Ergebnis lautet also:
Innerhalb von 5 Stunden gibt es $B(5) = 3^5 = 243$ Zombies.

Frage: Wie lange dauert es, bis ganz Europa (742,5 Millionen Menschen) zu Zombies wurde (mit Taschenrechner)? Versuche, das Ergebnis auszurechnen und schaue auf der nächsten Seite nach der Lösung!

Antwort: Gesucht ist der Zeitpunkt t, bei dem B(t)=742.500.000 gilt. Man setzt also den Funktionsterm gleich dem gegebenen B(t) und löst nach t auf:

$$742500000 = 3^t$$

Mithilfe des Taschenrechners ergibt sich:

$$solve(742500000 = 3^t, t)$$

Gib die Gleichung in deinem Taschenrechner ein und löse sie zur Wiederholung!

t = 18,6 Tage

Auf eine ganze Zahl gerundet, lautet das Ergebnis:
Ganz Europa ist bereits nach 19 Stunden zombifiziert.

Bestimmung des Wachstums- bzw. Zerfallsfaktors

Bei exponentiellem Wachstum

Der **Wachstumsfaktor a ergibt sich aus der Änderungsrate**. Im Einführungsbeispiel war

$a = 3$ (also ist $a > 1$)

Damit wird die Formel für das exponentielle Wachstum zu:

$$B(t) = B_0 \cdot (a)^t$$

mit

B(t): Bestand zum Zeitpunkt t
B(0): Anfangsbestand (also Bestand zum Zeitpunkt 0)
a: Wachstumsfaktor
t: Zeit in gegebener Einheit

Bei exponentiellem Zerfall

Der Zerfallsfaktor ergibt sich aus der Änderungsrate. Man sagt Zerfallsfaktor und nicht Wachstumsfaktor, wenn $0 < a < 1$.

Damit wird die Formel für den exponentiellen Zerfall zu:

$$B(t) = B_0 \cdot (a)^t$$

Wichtige Beispiele für Wachstums- und Zerfallsprozesse

Bakterienwachstum

Ein Bakterium **teilt** sich nach jeder Stunde in zwei **neue** Bakterien. Jedes weitere Bakterium teilt sich auch wieder jede Stunde. Wie viele Bakterien sind es nach einem Tag (=24h)?

Überlege kurz und schau dann auf der Folgeseite nach der Lösung.

$B_0 = 1$
$a = 2$
$t_1 = 24$

Man schreibt zunächst die gegebenen Werte auf. Gesucht ist $B(t_1) = B(24)$.
Dann setzt man in die Funktionsgleichung

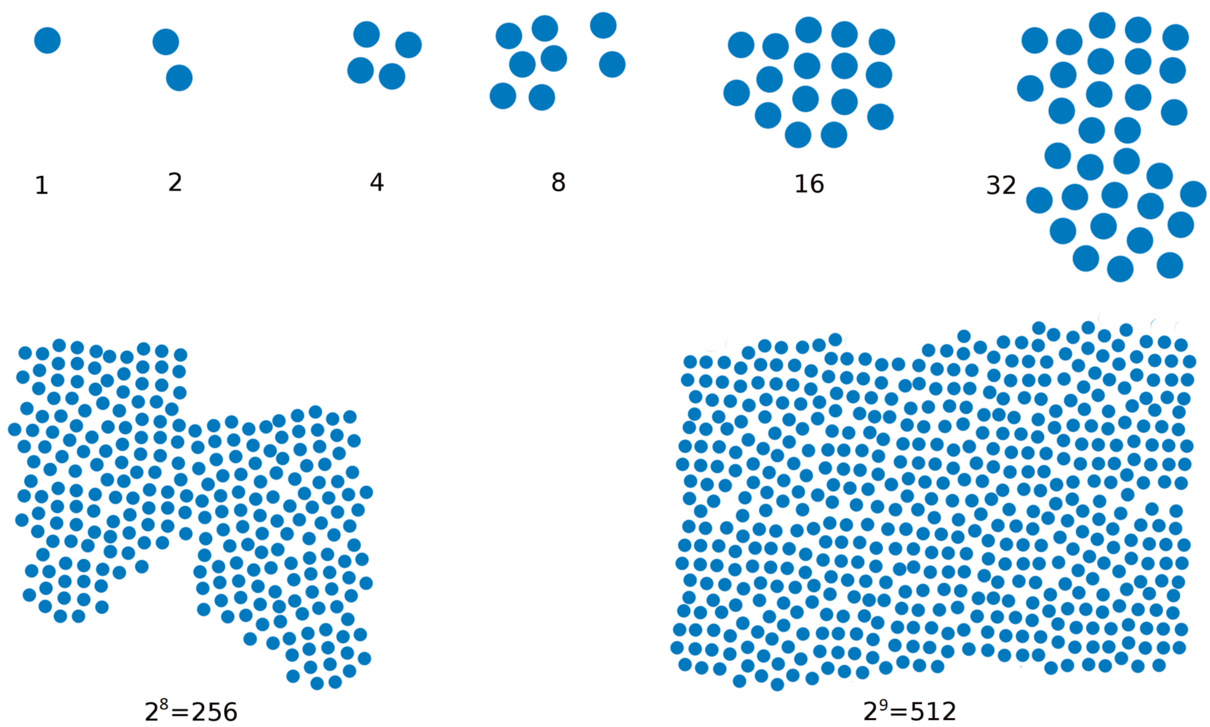
$$B(t) = B_0 \cdot a^t$$

ein und berechnet den Wert.

$$B(24) = 1 \cdot 2^{24} = 2^{24} = 16777216$$

Nach einem Tag sind es also 16777216 Bakterien.

Im Bild wird die steigende Wachstumsgeschwindigkeit anhand der zu den Bakterien gehörenden Funktionsgleichung $B(t) = 2^t$ verdeutlicht.



Zineszinsrechnung

Man legt 500€ bei einer jährlichen Verzinsung von 3% an. Wie viel Geld hat man nach 5 Jahren?

B_0 = 500€
Zins = 3 % = 0,03
t_1 = 5 Jahre

Man schreibt zunächst die gegebenen Werte auf. Gesucht ist $N(t_1)=N(5)$.
Dann setzt man in die Funktionsgleichung ein und berechnet den Wert.

$$B(5) = 500 \cdot (1 + 0{,}03)^5 = 500 \cdot (1{,}03)^5 = 579{,}64$$

Antwort: Nach 5 Jahren hat man also 579,64€.

Zerfall von Stoffen

Bei einem radioaktiven Stoff zerfällt jedes Jahr 10% der noch vorhandenen Masse. Berechne, wie viel nach 10 Jahren noch vorhanden ist.

Wenn jedes Jahr 10 % zerfallen, dann sind im Umkehrschluss nach jedem Jahr noch 90 % vom Vorjahr vorhanden. Wir bezeichnen die Masse des Stoffes im Jahr 0 mit m_0 , im Jahr 1 mit m_1 , im Jahr 2 mit m_2 ..., im Jahr 10 mit m_{10} .

Jahr	noch vorhandene Masse
0	m_0
1	$m_1 = 0{,}9 \cdot m_0$
2	$m_2 = 0{,}9 \cdot m_1 = 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot m_0 = (0{,}9)^2 \cdot m_0$
3	$m_3 = 0{,}9 \cdot m_2 = 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot m_0 = (0{,}9)^3 \cdot m_0$
⋮	⋮
9	$m_9 = 0{,}9 \cdot m_8 = 0{,}9 \cdot (0{,}9^8 \cdot m_0) = 0{,}9^9 m_0$
10	$m_{10} = 0{,}9 \cdot m_9 = 0{,}9 \cdot (0{,}9^9 \cdot m_0) = 0{,}9^{10} \cdot m_0$

$$m_{10} = 0{,}9 \cdot m_9 = 0{,}9^{10} \cdot m_0 \approx 0{,}3487 \cdot m_0$$

Antwort: Nach 10 Jahren sind also etwa 34,87% des ursprünglichen Materials vorhanden.