INFO: Gleichungen lösen mit der PQ-Formel

Mathematik Funktionen M 9

Definition: Quadratische Gleichungen in Allgemeiner Form und Normalform

Eine quadratische Gleichung in Allgemeiner Form ist eine Gleichung mit der Form:
$ax^2 + bx + c = 0$

Besonderheit: eine quadratische Gleichung in Allgemeiner Form kannst du nicht immer lösen, manchmal gibt es keine Lösung, manchmal gibt es genau eine Lösung und manchmal zwei Lösungen.

Wenn es zwei Lösungen gibt, sind es meisten zwei verschiedene Zahlen. Sie können das gleiche Vorzeichen haben, müssen sie aber nicht.

Für die Lösung dieser Gleichung gibt es eine Formel. Die kannst du aber erst benutzen, wenn du aus der Allgemeinform $ax^2 + bx + c = 0$ die Normalform $x^2 + px + q = 0$ gemacht hast.
(wie das geht lernst du in diesem Abschnitt)

Allgemeinform wird zur Normalform, indem du ...

... alle Teile der Allgemeinform durch den Faktor vor dem x^2 teilst.

$$ax^2 + bx + c = 0 | : a$$
$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$
$$\Rightarrow x^2 + px + q = 0$$

Beispiel

$$2x^2 + 4x + 7 = 0 | : 2$$
$$x^2 + 2x + \frac{7}{2} = 0$$

die pq-Formel

Die heißt so, weil du in ihr das p und das q aus der Normalform nutzt, um die Lösung zu berechnen.

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$$

WIE du die benutzt, lernst du auf der nächsten Seite.
Die pq-Formel steht in deiner Formelsammlung, du solltest sie dir aber trotzdem merken (machst du auch, wenn du eine Weile geübt hast). Eine Merkhilfe findest du in diesem Video:

p-q-Formel (Die Lösungsformel) (Mathe-Song)

pq-Formel für quadratische Gleichungen

Du willst wissen, was die pq Formel ist und wie du sie ganz einfach anwendest? Das erfährst du in diesem Video! Hier geht's zum ...

Link: https://youtu.be/QMFxmKxF5jo

Beispiel

Löse die Gleichung $x^2 + 12x + 32 = 0$

1. Werte finden:

$p = 12 \; und \; q = 32$

2. Einsetzen in die pq-Formel

$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$

$x_{1,2} = -\frac{12}{2} \pm \sqrt{(\frac{12}{2})^2 - 32}$

$x_{1,2} = -6 \pm \sqrt{(6)^2 - 32}$

$x_{1,2} = -6 \pm \sqrt{36 - 32}$

$x_{1,2} = -6 \pm \sqrt{4}$

$x_1 = -6 + 2 \; und \; x_2 = -6 - 2$

$x_1 = -4 \; und \; x_2 = -8$

$\mathbb{L} = \{-4 / -8\}$

Achtung

WENN $p < 0$ also eine negative Zahl ist, funktioniert die Formel immer noch. Achte dann genau auf die Vorzeichen!

Achtung

Entsteht unter der Wurzel eine Zahl kleiner als Null $\longrightarrow$ dann hat die Gleichung keine Lösung.

Steht unter der Wurzel eine Null gibt es eine Lösung $\rightarrow x_{1,2} = -\frac{p}{2}$

INFO: Gleichungen lösen mit der PQ-Formel

Mathematik Funktionen M 9

① Gib die Lösungsmenge an.

a) $x^2 + 10x + 21 = 0$

$\mathbb{L} = \{........ / ....\}$

b) $x^2 + 8x + 15 = 0$

$\mathbb{L} = \{........ / ....\}$

c) $x^2 + 9x + 14 = 0$

$\mathbb{L} = \{........ / ....\}$

d) $x^2 + 13x + 36 = 0$

$\mathbb{L} = \{........ / ....\}$

② Gib die Lösungsmenge an.

a) $x^2 - 12x + 27 = 0$

$\mathbb{L} = \{...... / ......\}$

b) $x^2 - 5x + 4 = 0$

$\mathbb{L} = \{...... / ......\}$

c) $x^2 - 15x + 50 = 0$

$\mathbb{L} = \{........ / ......\}$

d) $x^2 - 11x + 30 = 0$

$\mathbb{L} = \{...... / ......\}$

Erinnerung:
Um die pq-Formel anwenden zu können, muss die quadratische Gleichung in die Normalform der Form $x^2 + px + q = 0$ gebracht werden

Beispielaufgabe
Bestimme die Nullstellen der Funktion $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$.

Rechenweg

$f(x) = 0$

$2x^2 + 4x - 6 = 0 \quad | : 2$

Auf Normalform bringen!

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$p = 2; q = \text{-}3$

$x_{1,2} = \text{-}\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (\text{-}3)}$

$x_1 = 1; x_2 = \text{-}3$

$\mathbb{L} = \{1, -3\}$

INFO: Gleichungen lösen mit der PQ-Formel

Mathematik Funktionen M 9

③ Bringe zuerst in die Normalform.
Gib dann die Lösungsmenge an.

a) $8x^2 - 128x + 504 = 0$

x^2 .... $x +$ ....

$\mathbb{L} = \{....../......\}$

b) $6x^2 - 102x + 432 = 0$

x^2 .... $x +$ ....

$\mathbb{L} = \{....../......\}$

c) $1x^2 - 14x + 48 = 0$

x^2 .... $x +$ ....

$\mathbb{L} = \{....../......\}$

④ Bringe zuerst in die Normalform.
Gib dann die Lösungsmenge an.

a) $9x^2 - 81x + 180 = 0$

x^2 .... $x +$ ....

$\mathbb{L} = \{....../......\}$

b) $3x^2 - 45x + 162 = 0$

x^2 .... $x +$ ....

$\mathbb{L} = \{....../......\}$

c) $7x^2 - 98x + 315 = 0$

x^2 .... $x +$ ....

$\mathbb{L} = \{....../......\}$

Mitternachtsformel

Eine andere Möglichkeit, die Allgemeinform $ax^2 + bx + c = 0$ zu lösen, ist die Mitternachtsformel.

Die sieht so aus:

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Dort setzt du dann direkt die Werte a, b, c aus der Allgemeinform ein.

Die Formel findest du nicht in der Formelsammlung, weil sie nicht „Pflicht“ ist im Sächsischen Lehrplan, aber in anderen Bundesländern.
Du darfst sie natürlich trotzdem nutzen, wenn du das möchtest, wir konzentrieren uns im Unterricht aber auf die pq-Formel.

Mitternachtsformel (abc-Formel) einfach erklärt - Studyflix

Mit der Mitternachtsformel kannst du schnell und einfach quadratische Gleichungen lösen. Hier in unserem Video lernst du die ...

Link: https://youtu.be/ZFv2BiOvD_E

YouTube-Video

Wie lassen sich die Schnittpunkte einer quadratischen Funktion mit einer anderen Funktion berechnen?
Um die Schnittpunkte von zwei Funktionen zu bestimmen, müssen die Funktionen gleichgesetzt werden. Es entsteht eine Gleichung, die gelöst werden kann.

Beispielaufgabe
Ermittle, ob die Funktionen $f(x) = x^2 + 2x + 1$ und $g(x) = -2x - 3$ sich schneiden und gib gegebenenfalls die Schnittpunkte an.

Rechenweg

$f(x) = g(x)$

$x^2 + 2x + 1 = -2x - 3 \quad | + 2x + 3$

$x^2 + 4x + 4 = 0$

$p = 4; q = 4$

$x_{1,2} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 4}$

$x = -2$

$g(-2) = 1$

Die Funktionen berühren sich im Punkt $S(-2|1)$.