INFO: Kegel

Mathematik Körper R 9

Einstieg

Manche Alltagsgegenstände haben annähernd die Gestalt eines Kegels. Hier ein paar Beispiele:

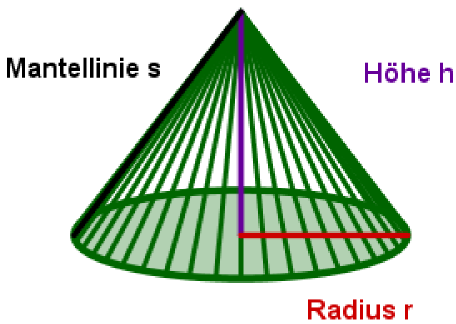
Begriffsdefinition

Ein Kegel ist

- ein dreidimensionaler **Körper,** der entsteht, wenn man
- alle Punkte eines Kreises
- mit **einem Punkt außerhalb** der Kreisebene

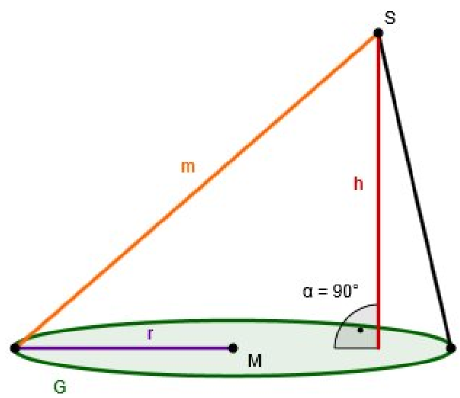
verbindet.

Der richtige Ausdruck für diesen Körper ist eigentlich **Kreiskegel**. In der höheren Mathematik werden nämlich manchmal auch Kegel betrachtet, deren Grundfläche kein Kreis ist.
In der Schule geht es in der Regel um **gerade Kreiskegel**. Bei geraden Kreiskegeln liegt die Spitze des Kegels senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche.



Bemerkung:
Ein gerader Kreiskegel entsteht, wenn sich ein rechtwinkliges Dreieck um eine seiner Seiten dreht.
Der entstehende Rotationskörper ist ein gerader Kreiskegel.

Es gibt aber auch schiefe Kreiskegel, wie z.B. der rechts dargestellte Kegel.



Volumen eines Kegels

Das Volumen eines Zylinders kennst du bereits. Hier nochmal zur Wiederholung:

$$V_{Zylinder} = A_G \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

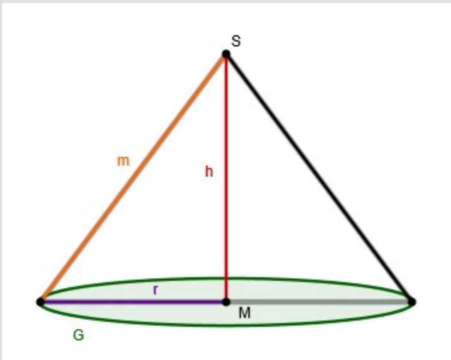
Schau dir folgendes Video an und überlege dir, wie man das Volumen eines Kreiskegels berechnet (den Teil mit der Kugel kannst du ignorieren, der folgt später):

Volumenformel für den Kegel

Volumen von Kegeln

Das Volumen eines Kegels berechnet sich wie folgt:

$$V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$



mit

A_G: Grundfläche des Kegels
h: Höhe des Kegels
r: Radius der Grundfläche G des Kegels

Kegel \- Volumen berechnen

Warum ist das so?
Die Grundfläche A_G eines Kegels ist ein Kreis. Die Fläche von einem Kreis erhält man mit der Formel $A_{Kreis} = \pi \cdot r^2$

Beispiel

Es ist Sommer und du kaufst ein Eis. Du erinnerst Dich, dass bei Eispackungen im Supermarkt die Menge an Eis in Litern angegeben ist. Das bringt Dich dazu, das Volumen in deiner Eistüte bestimmen zu wollen!

Nach Deiner Messung ist die Eistüte 16cm hoch und die Öffnung hat einen Durchmesser von 6cm. Wie viel Liter Eis befinden sich darin?

Lösung

Du benötigst den Radius r und die Höhe h des Kegels. Die Höhe ist direkt gegeben und der Radius ist der halbe Durchmesser: Berechne damit nun das Volumen.

d = 6cm
r = 3cm
h = 16cm

$$V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (3cm)^2 \cdot 16cm = 151cm^3$$

Antwort: Die Eistüte hat ein Volumen von 151 cm^3.

Oberflächeninhalt eines Kegels

Schaut euch dazu folgendes Video an:

Kegel \- Oberflächeninhalt berechnen

Oberflächeninhalt von Kegeln

Der Oberflächeninhalt A$_O$ eines Kegels berechnet sich wie folgt:

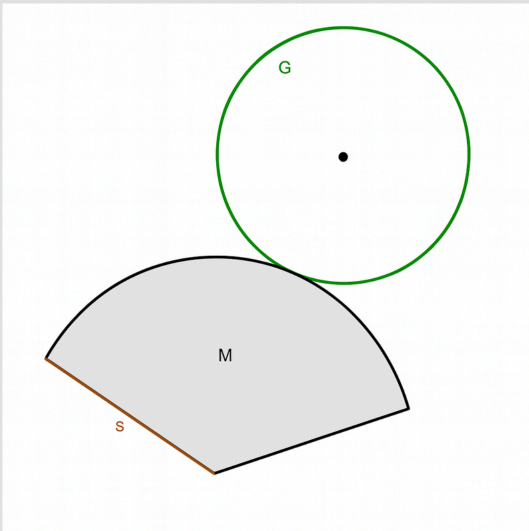
$$A_O = A_G + A_M$$

$$A_G = \pi \cdot r^2$$
$$A_M = \pi \cdot r \cdot s$$

Also:
$$A_O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s$$

mit

A$_O$: Oberflächeninhalt des Kegels
A$_G$: Grundfläche des Kegels
A$_M$: Mantelfläche des Kegels
s: Mantellinie am Kegel
r: Radius der Grundfläche des Kegels

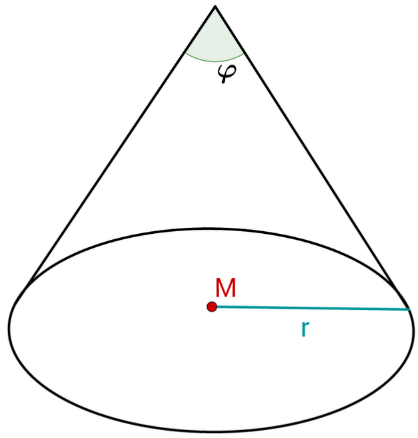


Warum ist das so?

Die Grundfläche G eines Kegels ist ein Kreis . Die Fläche von einem Kreis erhält man durch die Formel $A_{Kreis} = \pi \cdot r^2$
Die Mantelfläche M eines Kegels ist ein Kreissektor mit Radius s. Die Fläche von diesem Kreissektor erhält man durch die Formel $A_{Mantel} = \pi \cdot s^2 \cdot \frac{\alpha}{360}$
Dabei ist α der Mittelpunktswinkel des Kreissektors. Dieser verhält sich zu 360° wie die Kreisbogenlänge, hier $2 \cdot \pi \cdot r$, zum gesamten Umfang eines Kreises mit Radius s. Also ergibt sich für die Mantelfläche:
$$A_{Mantel} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{2 \cdot \pi \cdot s} \cdot \pi \cdot s^2 = \frac{r}{s} \cdot \pi \cdot s^2 = \pi \cdot r \cdot s$$

Beispiel

Betrachte den geraden Kegel. Der Radius der Grundfläche ist r=3cm und die Mantellinie s beträgt 6cm.



Berechne den Oberflächeninhalt des Kegels.

Lösung

r = 3cm
s = 6 cm

$$A_O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s$$
$$A_O = \pi \cdot (3cm)^2 + \pi \cdot 3cm \cdot 6cm = 84{,}8cm^2$$

Antwort: Der Oberflächeninhalt des Kegels beträgt 84,8cm².