

INFO, INPUT: Kopie von: Die Koordinatengleich...

Mathematik Vektoren 12



Wo stehe ich?

⇒ Erstelle eine ABC-Liste zu allen bisher relevanten Begriffen zum Thema „Geraden und Ebenen im Raum“.

A	
B	
C	
D	
E	
F	
G	
H	
I	
J	
K	
L	
M	
N	
O	
P	
Q	
R	
S	
T	
U	
V	
W	
X,Y	
Z	



Wo stehe ich?

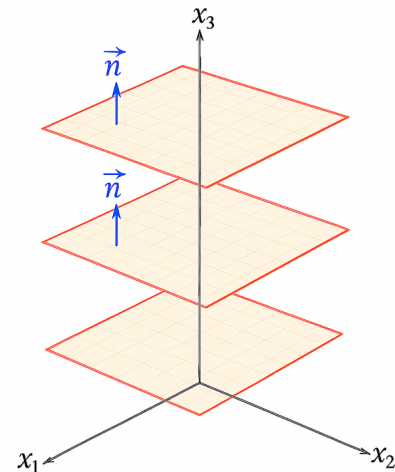
- ⇒ Vergleiche deine Liste mit einem Arbeitspartner und ergänze fehlende Begriffe.
- ⇒ Erläutere die Bestandteile einer Ebenengleichung in Parameterform.
Gib ein Beispiel an.





Du hast vermutlich festgestellt, dass wenn du die Ebenen an die spitze Seite des Stiftes hältst, es viele verschiedenen Ausrichtungsmöglichkeiten gibt. Hältst du die Ebene an die flache Seite des Stiftes, so dass beide senkrecht zueinander stehen, gibt es nur eine mögliche Position der Ebene. Der senkrechte Normalenvektor legt also die Ausrichtung der Ebene eindeutig fest.

Da ein Vektor ja keine feste Position im Koordinatensystem beschreibt sondern nur eine bestimmte Richtung und Länge, kann der Normalenvektor an jedem beliebigen Punkt des Koordinatensystems beginnen. Seine Position und damit auch die der Ebene ist also noch nicht eindeutig bestimmt. Es sind viele parallele Ebenen möglich. Um die Ebene eindeutig zu bestimmen benötigen wir also noch den Stützvektor (Punkt der auf der Ebene liegt).



Die allgemeine Form der Koordinatengleichung

Die allgemeine Form der Koordinatengleichung lautet:

$$E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$$

Dabei sind x_1 , x_2 und x_3 die Koordinaten eines beliebigen Punktes $X(x_1|x_2|x_3)$, der in der Ebene liegt.

n_1 , n_2 und n_3 sind die Koordinaten eines Normalenvektors der Ebene $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$.

Der Normalenvektor ist ein Vektor, der senkrecht auf der Ebene steht und damit die Neigung der Ebene angibt. Der Wert d beschreibt die genaue Position der Ebene im Koordinatensystem. So haben parallele Ebenen den gleichen Normalenvektor, aber unterschiedliche Werte für d .

Um d zu bestimmen, werden die Koordinaten eines beliebigen Punktes, der in der Ebene liegt, in die Koordinatengleichung eingesetzt.

Die Koordinatengleichung einer Ebene aus Stützvektor und Normalenvektor bestimmen

Beispielaufgabe

Die Ebene enthält den Punkt $P(2/-4/1)$ und ist orthogonal zu $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Gib eine Koordinatengleichung von E an.

Rechenweg

Die Koordinaten des Normalenvektors werden in die Koordinatengleichung eingesetzt:

$$E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d \text{ also } E: 5x_1 - 2x_2 + 1x_3 = d.$$

Der Stützvektor der Ebene $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ führt zu einem Punkt, der in der Ebene liegt.

Seine Koordinaten können daher für x_1 , x_2 und x_3 eingesetzt werden, um d zu berechnen:

$$5 \cdot 2 - 2 \cdot (-4) + 1 \cdot 1 = d \Rightarrow d = 19$$

Der Wert von d wird in die Ebenengleichung eingesetzt. Nun liegt die Ebene als Koordinatengleichung vor:

$$E: 5x_1 - 2x_2 + 1x_3 = 19$$

Punkte in der Ebene bestimmen

Beispielaufgabe

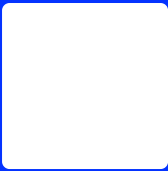
Gib drei Punkte an, die in $E: 2x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 8$

Rechenweg

Setze Werte für x_1 , x_2 und x_3 ein, so dass die Gleichung erfüllt ist.

Zum Beispiel $A(2/2/0)$.

Was du auch immer tun kannst, ist zwei der drei Koordinaten gleich null setzen und nur die dritte Koordinate berechnen. Zum Beispiel $B(0/0/8)$ oder $C(0/4/0)$.



Normalenvektor aus Koordinatengleichung bestimmen

Beispielaufgabe

Gib den Normalenvektor der Ebene $E : -3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -3$ an.



Rechenweg

Der Normalenvektor entspricht den Koeffizienten von x_1, x_2 und x_3 .

Es gilt also $\vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

Können zwei unterschiedliche Koordinatengleichungen zu identischen Ebenen gehören?

Koordinatengleichungen dürfen wie andere Gleichungen umgeformt werden, indem sie mit einem Faktor multipliziert werden. Die beiden folgenden Ebenengleichungen beschreiben daher identische Ebenen.

$$E_1 : 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -4$$

$$E_2 : 4x_1 + 6x_2 - 4x_3 = -8$$

E_1 wurde mit dem Faktor 2 multipliziert, um E_2 zu erhalten.



Wie wird mit einer Koordinatengleichung eine Punktprobe gemacht?

Um zu prüfen, ob ein Punkt in der Ebene liegt, werden seine Koordinaten in die Koordinatengleichung eingesetzt. Nur wenn sich daraus eine wahre Aussage ergibt, liegt der Punkt in der Ebene.

Beispielaufgabe

Untersuche, ob die Punkte $P(-4|2|1)$ und $Q(0|1|2)$ in der Ebene

$E: 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -4$ liegen.



Rechenweg

Untersuchung von P

Die Koordinaten des Punktes P werden in die Ebene eingesetzt:

$$2 \cdot (-4) + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = -4$$

$$-4 = -4 \checkmark$$

Die Aussage ist wahr. Der Punkt P liegt in der Ebene E .

Untersuchung von Q

Die Koordinaten des Punktes Q werden in die Ebene eingesetzt:

$$2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -4$$

$$-1 \neq -4$$

Die Aussage ist falsch. Der Punkt Q liegt nicht in der Ebene E .