



INFO: Kugel

Mathematik Körper R 9

Einstieg

Eine **Kugel** ist im dreidimensionalen Raum das, was im zweidimensionalen Raum ein Kreis ist. Jede Kugel hat einen Mittelpunkt M . Alle Punkte auf der Kugeloberfläche haben den **gleichen** Abstand zu M . Dieser Abstand r heißt Radiuslänge.



Vergleich von Kreis und Kugel

	Kreis	Kugel
Mittelpunkt M	denselben Abstand von Kreislinie zum Mittelpunkt $M = (x y)$	denselben Abstand von Kugeloberfläche zum Zentrum $M = (x y z)$
Radius r	Strecke r zwischen einem Punkt P auf der Kreislinie zu M ; $r = \overline{PM}$	Strecke r zwischen einem Punkt P auf der Kugeloberfläche zu M ; $r = \overline{PM}$
Dimension	Ein Kreis befindet sich auf einer Ebene.	Eine Kugel befindet sich in einem Raum.
Zusammenfassung	Bei einem Kreis haben alle Punkte auf einer Ebene denselben Abstand r zum Mittelpunkt M .	Bei einer Kugel haben alle Punkte in einem Raum denselben Abstand r zum Zentrum M .



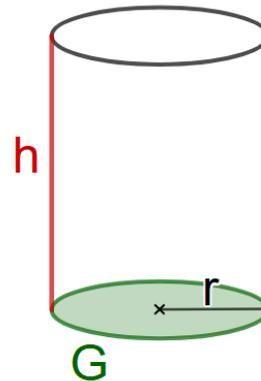


Volumen einer Kugel

Das Volumen einer Kugel lässt sich auf Basis des Volumens eines Zylinders herleiten. Wie das geht, erfährst du hier:

Im anderen Kapitel hast du bereits gelernt, wie man das Volumen eines Zylinders berechnet. Die allgemeine Formel dazu lautet:

$$V_{\text{Zylinder}} = A_G \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$$



Angenommen, die Höhe eines Zylinders entspricht genau $2r$ dem Radius einer Kugel, also $h = 2r$. Wie berechnet man jetzt das Volumen des Zylinders allgemein?

$$V_{\text{Zylinder}} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

mit $h = 2r$ folgt:

$$V_{\text{Zylinder}} = \pi \cdot r^2 \cdot 2r = 2 \cdot \pi \cdot r^3$$

Schau dir folgendes Video an und überlege dir anschließend, wie man das Volumen einer Kugel berechnet:

Volumen Formel für die Kugel (Mathe Work 2.0)





Volumen einer Kugel

Wenn man wissen möchte, wie viel Rauminhalt eine Kugel hat, so muss man das Volumen berechnen.

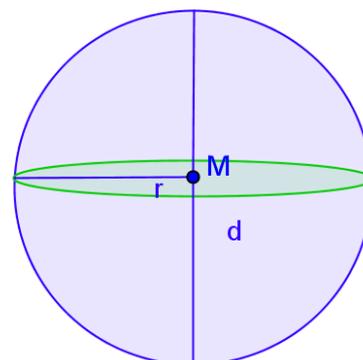


Volumen einer Kugel

Das Volumen einer Kugel berechnet sich wie folgt:

$$V_{Kugel} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Kugel \-
Volumen
berechnen



Beispiel

Berechne das Volumen einer Billardkugel, die einen Durchmesser d von 57,2 mm hat.

Bevor du deinen gegebenen Wert sofort in die neue Formel einsetzt, musst du dir klarmachen, dass sich ein Kreis und eine Kugel hinsichtlich **Radius** und **Durchmesser** nicht unterscheiden.



$$r = \frac{d}{2} = \frac{57,2mm}{2} = 28,6mm$$

$$V_{Billardkugel} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (28,6mm)^3 = 97991mm^3 \approx 98cm^3$$





Oberflächeninhalt einer Kugel

Vereinfacht kann man sich eine Oberfläche wie einen Mantel vorstellen, der sich um die geometrische Figur legt. Eine Zeitungsseite kann so zu einem Kegel geformt werden, wenn man sie rollt. Diese Fläche ergibt die Oberfläche.

Wenn man nun **die Kugel** in Farbe eintaucht, so markiert man dessen Oberflächeninhalt. Mithilfe dieser Fläche kann man z. B. ausrechnen, wie viel Gold man braucht, damit man die Kugel auf der Dachspitze vom Olympiaturm vergolden kann.

Experiment

Material je Gruppe:

- 1 Orange
- Lineal
- Weißes A4 Papier
- Stift

Video zum Experiment (Oberflächeninhalt einer Kugel)

Versuch für die Herleitung der Oberflächenformel einer Kugel.



1. Schält die Orange und zerteilt sie in 2 Hälften.
2. Legt eine Hälfte mit der flachen Seite nach unten auf ein Blatt Papier und zeichnet einen Kreis. Malt ihn mit dickem Stift nach.
3. Nehmt die Schale und legt euren Kreis mit den Schalenstückchen aus. Legt so, dass möglichst keine Lücken und keine Überlappungen entstehen.
4. Ihr habt noch Schale übrig? Dann zeichnet einen weiteren Kreis und fahrt fort wie in Schritt 3, bis alle Schalenstückchen eurer Orange in Kreisen ausgelegt wurden.
5. Notiert, wie viele Kreise ihr mit der Schale einer Orange auslegen konntet.

Vergleicht mit den anderen Gruppen. Wie lautet die Formel für den Oberflächeninhalt einer Kugel in Abhängigkeit von r ?



INFO: Kugel

Mathematik Körper R 9



Oberflächeninhalt einer Kugel

Der Oberflächeninhalt einer Kugel berechnet sich wie folgt:

$$A_O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

Kugel \-
Oberfläche
berechnen



Beispiel

Ein offizieller Basketball hat einen Oberflächeninhalt von $(576 \cdot \pi) \text{cm}^2$. Wie groß ist dann der Radius r ?

$$O_{\text{Basketball}} = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

Stelle zunächst nach dem Wert r^2 um.

$$r^2 = \frac{O_{\text{Basketball}}}{4\pi}$$

Ziehe anschließend die Wurzel

$$r = \sqrt{\frac{O_{\text{Basketball}}}{4\pi}}$$

Setze die Werte ein

$$r = \sqrt{\frac{576\pi \text{cm}^2}{4\pi}} = 12 \text{cm}$$

Antwort: Der Radius eines Basketballs beträgt also 12 cm.



Schau dir auch unbedingt das Video zur Kugel vom DorFuchs an:

Kugel: Volumen und
Oberfläche (Mathe-Song)

