INFO: Lagebeziehungen zweier Geraden

Mathematik Vektoren 12

Lagebeziehungen von Geraden

Zwei Geraden können unterschiedlich zueinander liegen. Dabei werden vier Fälle unterschieden:

Die beiden Geraden sind identisch. (Sie können trotzdem unterschiedliche Geradengleichungen haben).

Die beiden Geraden verlaufen parallel.

Die beiden Geraden schneiden sich. Sie haben genau einen gemeinsamen Schnittpunkt.

Die beiden Geraden sind windschief. Sie haben keinen gemeinsamen Punkt.

Zeichnerisch lässt sich die gegenseitige Lage von zwei Geraden manchmal nur schwer einschätzen. Um zu untersuchen, welcher der vier Fälle vorliegt, werden die beiden Geradengleichungen nach dem folgenden Schema untersucht:

Sind die Richtungsvektoren der Geraden linear abhängig, also Vielfache voneinander?

- ja → *Die Geraden müssen parallel oder identisch sein.*
  - Liegt ein beliebiger Punkt der einen Geraden auch auf der anderen Geraden?
    - ja → Die Geraden sind identisch.
    - nein → Die Geraden sind parallel.
- nein → *Die Geraden schneiden sich oder sind windschief zueinander.*
  - Haben die Geraden einen Schnittpunkt?
    - ja → Die Geraden schneiden sich.
    - nein → Die Geraden sind windschief.

Was ist lineare Abhängigkeit?

Zwei Vektoren sind linear abhängig, wenn sie parallel zueinander verlaufen. Sie müssen nicht in ihrer Länge und auch nicht ihrer Orientierung übereinstimmen. Linear abhängige Vektoren lassen sich durch Multiplikation mit einem Faktor ***r*** ineinander überführen. Es muss gelten $\overrightarrow{b} = r \cdot \overrightarrow{a}$ oder $\overrightarrow{a} = r \cdot \overrightarrow{b}$.

Da $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ sind diese beiden Vektoren sind linear abhängig.

INFO: Lagebeziehungen zweier Geraden

Mathematik Vektoren 12

Beispielaufgabe

Untersuche, wie die Geraden zur Geraden g liegen.

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) $h: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

b) $i: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

c) $j: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $k: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Untersuchung der Geraden h

Laut Schema ist der erste Schritt bei der Untersuchung von Lagebeziehungen die Prüfung, ob die Richtungsvektoren linear abhängig sind. Dafür wird untersucht, ob es einen Faktor r gibt, mit dem sich der eine Richtungsvektor in den anderen überführen lässt.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$r = 0{,}5$

Die lineare Abhängigkeit von Vektoren lässt sich oft auf einen Blick erkennen. Als Teil des Rechenweges muss dieser Schritt aber trotzdem notiert werden.

Die Richtungsvektoren sind linear abhängig. Daher geht es im Schema auf der linken Seite weiter. Um zu prüfen, ob ein Punkt der einen Geraden auch auf der anderen Geraden liegt, wird eine Punktprobe durchgeführt. Dafür wird der Stützvektor der ersten Geraden mit der zweiten Geraden gleichgesetzt:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$s = -2$

Für die Berechnung des Parameters wird die Vektorgleichung in ein LGS mit drei Gleichungen überführt. Diese werden dann alle nach dem Parameter aufgelöst. Die Punktprobe gilt nur als positiv, wenn in allen drei Gleichungen der gleiche Wert für den Parameter rauskommt.

Die Punktprobe ist positiv.
Die beiden Geraden sind identisch.

b) Untersuchung der Geraden i

Wie schon bei a) gezeigt, sind die Richtungsvektoren linear abhängig.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Nun wird auch hier eine Punktprobe durchgeführt:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Um zu verdeutlichen, dass das LGS nicht lösbar ist, wurde das Gleichheitszeichen durch ein Ungleichheitszeichen ersetzt.

Nach Umwandlung der Vektorgleichung in ein LGS ergibt sich ein Widerspruch beim Lösen des LGS. Die Punktprobe ist negativ.

$$\begin{aligned} 2 &= 3 + 2s & &\rightarrow & s &= -0{,}5 \\ 1 &= 2 & &\rightarrow & &\lightning \\ -3 &= 4 + 6s & &\rightarrow & s &= -\frac{7}{6} \end{aligned}$$

Manchmal wird auch der Ausdruck „echt parallel“ verwendet, um diesen Fall stärker von dem Fall „identische Geraden“ abzugrenzen.

Die beiden Geraden sind parallel.

c) Untersuchung der Geraden j

Im ersten Schritt wird wieder untersucht, ob die Richtungsvektoren linear abhängig sind:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \neq k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hier wird ebenfalls ein Ungleichheitszeichen verwendet, um zu zeigen, dass die Gleichung nicht lösbar ist.

Da kein Wert für k gefunden wird, geht es auf der rechten Seite des Schemas weiter. Der nächste Schritt ist die Untersuchung, ob die Geraden sich schneiden. Dafür werden die beiden Geradengleichungen gleichgesetzt:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fortsetzung von Teilaufgabe c)

$$\begin{aligned} 2 + r &= 6 + 3s \\ 1 \quad &= 1 + s \quad \rightarrow \quad s = 0 \\ -3 + 3r &= 9 + s \end{aligned}$$

Setze ich $s = 0$ in Gleichung I und II ein, erhalte ich jeweils $r = 4$.
Die beiden Geraden haben also einen gemeinsamen Schnittpunkt.

Der Schnittpunkt der Geraden lässt sich bestimmen, indem entweder r oder s in die zugehörige Gerade eingesetzt wird. In beiden Fällen ergibt sich der gleiche Schnittpunkt. Hier wird r in die Gerade g eingesetzt:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$S(6|1|9)$

d) Untersuchung der Geraden k

Im ersten Schritt wird wieder untersucht, ob die Richtungsvektoren linear abhängig sind:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \neq k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wie schon bei c) gezeigt, sind die Richtungsvektoren linear unabhängig. Somit wird geprüft, ob es einen Schnittpunkt gibt, indem die Geraden gleichgesetzt werden:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Vektorgleichung wird in ein LGS umgewandelt. Beim Lösen des LGS gibt es einen Widerspruch. Das wird durch Setzen des Ungleichheitszeichens verdeutlicht.

$$\begin{aligned} 2 + r &= 6 + 3s \\ 1 \quad &= 2 + s \quad \rightarrow \quad s = -1 \\ -3 + 3r &= 9 + s \end{aligned}$$

Setze ich $s = 0$ in Gleichung I und II ein, erhalte ich $r = 1$ bzw. $r = \frac{11}{3}$. Widerspruch ↯

Die beiden Geraden haben keinen gemeinsamen Schnittpunkt, sie sind windschief.

https://www.youtube.com/watch?v=S9m44EDVQ6M

https://studyflix.de/mathematik/lagebeziehungen-von-geraden-5826/video