INFO: Lineares vs. exponentielles Wachstum

Mathematik Funktionen M 10

Einstieg

Schau dir zum Einstieg folgendes Video an:

Unterschied exponentielles, quadratisches und lineares Wachstum | alpha Lernen erklärt Mathe

Welche ist die schnellste Form des Wachstums? Und wie erkennst du, was wie wächst? Mehr zu

Du hast im Video gelernt, dass einen großen Unterschied zwischen linearem, exponentiellen und quadratischem Wachstum gibt. Im Folgenden wollen wir uns insbesondere mit dem Unterschied zwischen **linearem** und **exponentiellem** Wachstum beschäftigen, da es in der Natur besonders häufig vorkommt.

Anhand zweier Praxisbeispiele wollen wir den Unterschied klarmachen:

- Bakterielles Wachstum
- Vermehrung von Geld und Zinseszinsrechnung

Beispiel Bakterienwachstum (linear vs. exponentiell)

Zu Beginn sind 10 Bakterien vorhanden. Das Wachstum soll 50 % betragen.

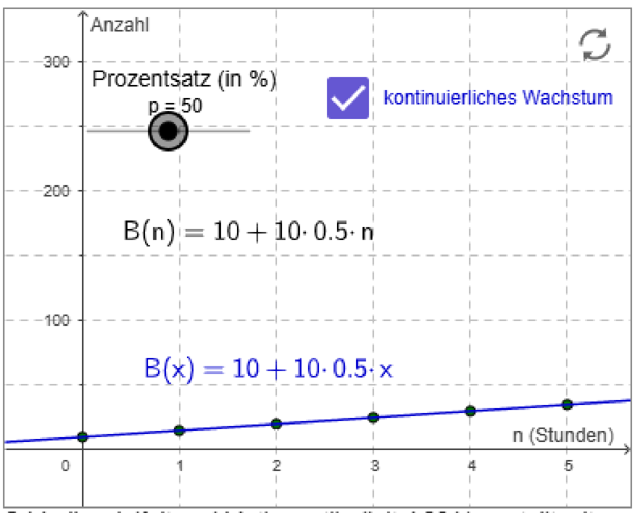
Wir unterscheiden zwei Szenarien:

Szenario 1: Das Wachstum erfolgt linear
Beim linearen Wachstum wird davon ausgegangen, dass in jeder Stunde eine gleich bleibende Anzahl der **ursprünglichen** Anzahl der Bakterien B_0 hinzukommen.

In unserem Beispiel vermehren sich die Bakterien um 50 % der ursprünglichen Bakterien. Es kommen also pro Stunde 50 % von 10 Bakterien = 5 Bakterien hinzu.

Die Vermehrung in den weiteren Stunden wird also immer nur von der **ursprünglichen Bakterienanzahl B_0** aus berechnet.

Stunde	Anzahl Bakterien
0	10
1	15
2	20
3	25
4	30
5	35
6	40



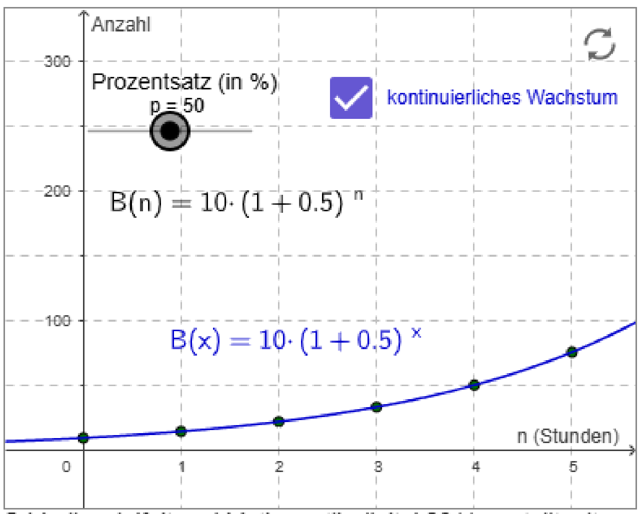
© Medienvielfalt und Mathematik-digital 2011, erstellt mit GeoGebra

Szenario 2: Das Wachstum erfolgt exponentiell
Beim exponentiellen Wachstum nimmt die Anzahl der Bakterien in jeder Stunde um einen bestimmten Prozentsatz der Anzahl in der **vorangegangenen** Stunde zu.

Das bedeutet, dass die Bakterienzahl B_0 in jeder Stunde mit einem festen Faktor multipliziert wird.

In unserem Beispiel vermehren sich die Bakterien um 50 % pro Stunde, bezogen auf die **vorangegangene** Stunde.

Stunde	Anzahl Bakterien
0	10
1	15
2	23
3	33
4	50
5	75
6	113



© Medienvielfalt und Mathematik-digital 2011, erstellt mit GeoGebra

INFO: Lineares vs. exponentielles Wachstum

Mathematik Funktionen M 10

Beispiel Verzinsung (linear vs. exponentiell)

Du hast 1.000 EUR gespart. Das Kapitel soll sich um 3 % p.a. (lat. p.a. = per annum = pro Jahr) vermehren.

<u>Szenario 1: Das Wachstum erfolgt linear</u>
Beim linearen Wachstum wird davon ausgegangen, dass jedes eine gleich bleibende Menge des **<u>ursprünglichen</u>** Kapitals B_0 hinzukommt.

In unserem Beispiel vermehrt sich das Geld um 3 % des ursprünglichen Kapitals. Es kommen also pro Jahr 3 % von 1.000 EUR = 30 EUR hinzu.

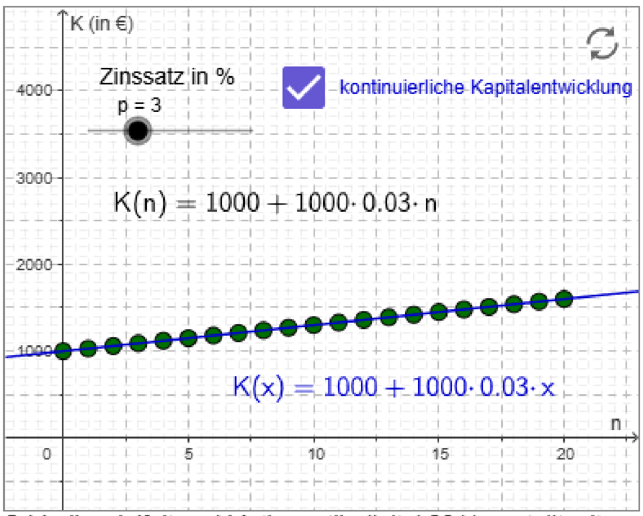
Die Vermehrung des Geldes wird also immer nur vom **ursprünglichen Kapital B_0** aus berechnet.

<u>Szenario 2: Das Wachstum erfolgt exponentiell</u>
Beim exponentiellen Wachstum nimmt die Menge der Geldes jedes Jahr um einen bestimmten Prozentsatz des Kapitals des **<u>vorangegangenen</u>** Jahres zu.

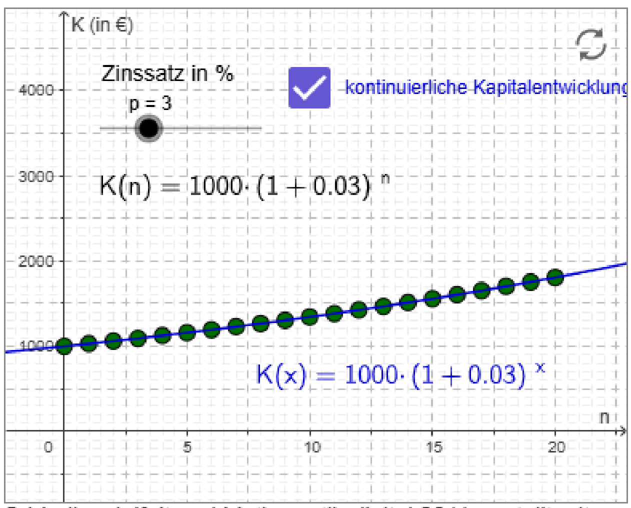
In unserem Beispiel vermehrt sich das Kapital um 3 % pro Jahr, bezogen auf das Kapital des vorangegangenen Jahres.

Jahr	Kapital in EUR	
0	1.000	
1	1.030	+30
2	1.060	+30
3	1.090	+30
4	1.120	+30
5	1.150	+30
6	1.180	+30

Jahr	Kapital in EUR	
0	1.000,00	
1	1.030,00	·1,03
2	1.060,90	·1,03
3	1.092,73	·1,03
4	1.125,51	·1,03
5	1.159,27	·1,03
6	1.194,05	·1,03



© Medienvielfalt und Mathematik-digital 2011, erstellt mit GeoGebra



© Medienvielfalt und Mathematik-digital 2011, erstellt mit GeoGebra

Lineares Wachstum

Bei einem linearen Wachstum erfolgt das Wachstum in konstanten Schritten, also

$d = B(t+1) - B(t)$

mit B(t) = Bestand zum Zeitpunkt t

Es handelt sich um eine **lineare Funktion**, der Graph ist eine **Gerade**.

Beispiel:

t	0	1	2	3
B(t)	8,4	7,2	6,0	4,8

-1,2 -1,2 -1,2

$d = -1{,}2$

Veränderung um einen festen <u>Betrag d</u>

Exponentielles Wachstum

Bei einem exponentiellen Wachstum erfolgt das Wachstum mit einem konstanten Wachstumsfaktor a, also

$a = \frac{B(t+1)}{B(t)}$

Außerdem gilt $B(t) = B(0) \cdot a^t$

mit

B(0): Anfangsbestand
B(t): Bestand zum Zeitpunkt t
a: Wachstumsfaktor
t: vergangene Zeit (z.B: Stunden, Tage, Wochen, Jahre...)

Der Wachstumsfaktor a kann auch kleiner als 1 sein, dann spricht man von einem **negativen Wachstum** = Zerfall

Beispiel:

t	0	1	2	3
B(t)	1,6	2,4	3,6	5,4

$\cdot 1{,}5$ $\cdot 1{,}5$ $\cdot 1{,}5$

Veränderung um einen festen <u>Faktor a</u>

Hier ist der Wachstumsfaktor a konstant, da

$a = \frac{2{,}4}{1{,}6} = \frac{3{,}6}{2{,}4} = \frac{5{,}4}{3{,}6} = 1{,}5$