

Sieh dir das Video an.

Normalen- und Koordinatengleichung einer Ebene



Beispielaufgabe

Gegeben ist die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Wandle die Ebene in eine Normalen- bzw. Koordinatengleichung um.

Rechenweg

Die **Normalenform** einer Ebene lautet allgemein: $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$

Ein Normalenvektor der Ebene wird berechnet, indem das Vektorprodukt der beiden Spannvektoren berechnet wird:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Da der Stützvektor $A(1/0/3)$ in der Ebene liegt lautet die Normalengleichung der Ebene

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

Als Koordinatengleichung ergibt sich durch Ausmultiplizieren

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$E: 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -4$$



Beispielaufgabe

Gegeben ist die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Wandle die Ebene in eine Koordinatengleichung um.

Rechenweg

Du kannst die Koordinatengleichung auch ohne Umweg über die Normalengleichung erstellen. Dazu berechnest du ebenfalls zuerst den Normalenvektor der Ebene, indem du das Vektorprodukt der beiden Spannvektoren berechnest:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten des Normalenvektors werden in die Koordinatengleichung eingesetzt:

$$E: n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = d$$

$$E: 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = d$$

Der Stützvektor der Ebene $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ führt zu einem Punkt, der in der Ebene liegt. Seine

Koordinaten können daher für x_1 , x_2 und x_3 eingesetzt werden, um d zu berechnen:

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 - 2 \cdot 3 = d$$

$$d = -4$$

Der Wert von d wird in die Ebenengleichung eingesetzt. Nun liegt die Ebene als Koordinatengleichung vor:

$$E: 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -4$$