

INPUT: Spurpunkte von Geraden

Mathematik Vektoren 12



Arbeitsauftrag

Erarbeite dir die Rechenregeln zu Spurpunkten von Geraden, indem du die Aufgaben löst. Wenn du nicht weiter kommst, findest du die Lösung am Ende des Dokuments.

Beispielaufgabe

Gegeben ist die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ermittle die Spurpunkte.

Was sind Spurpunkte?

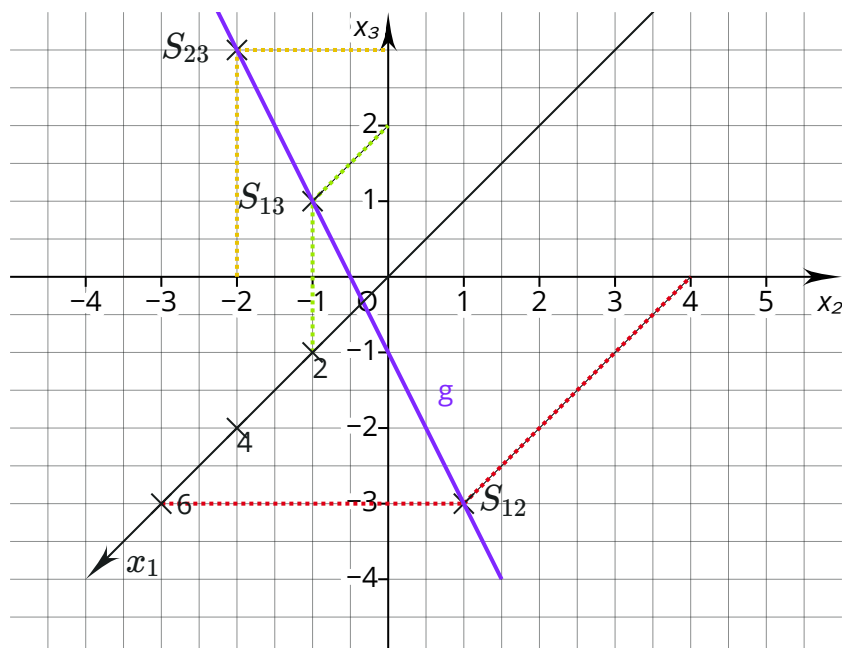
Als Spurpunkte werden die Schnittpunkte einer Geraden mit den Koordinatenebenen bezeichnet. Spurpunkte helfen, die Lage einer Geraden im dreidimensionalen Koordinatensystem zu verdeutlichen.

Koordinatenebenen

x_1x_2 -Ebene: alle Punkte $P(x_1/x_2/0)$ Spurpunkt S_{12}

x_2x_3 -Ebene: alle Punkte $P(0/x_2/x_3)$ Spurpunkt S_{23}

x_1x_3 -Ebene: alle Punkte $P(x_1/0/x_3)$ Spurpunkt S_{13}



INPUT: Spurpunkte von Geraden

Mathematik Vektoren 12

- ① Im Kasten wird der Spurpunkt der Geraden mit der x_1x_2 -Ebene (oder auch xy -Ebene) berechnet. Erläutere das Vorgehen.

 Spurpunkt S_{12} der x_1x_2 -Ebene

(1) $x_3 = 0$

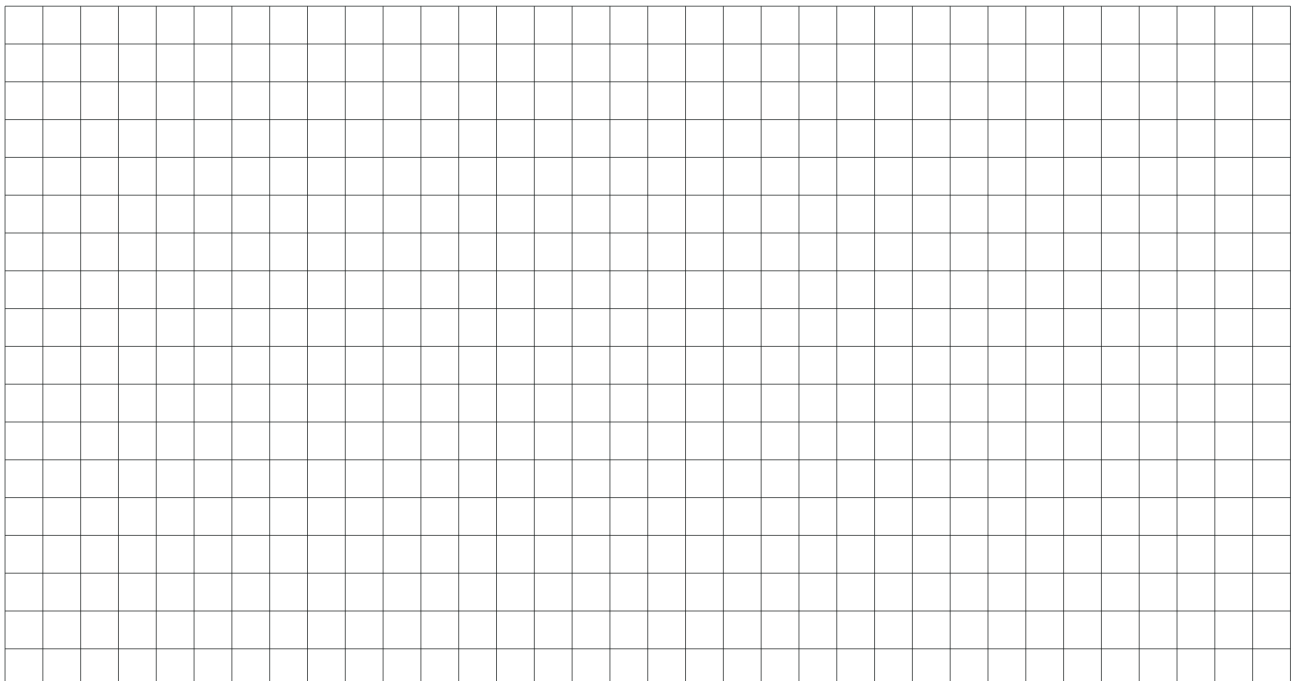
(2) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(3) $0 = 4 - r$
 $\Rightarrow r = 4$

(4) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

(5) $S_{12} = (6/4/0)$

- ② Berechne die beiden anderen Spurpunkte S_{23} und S_{13} der in der Beispielaufgabe angegebenen Gerade.



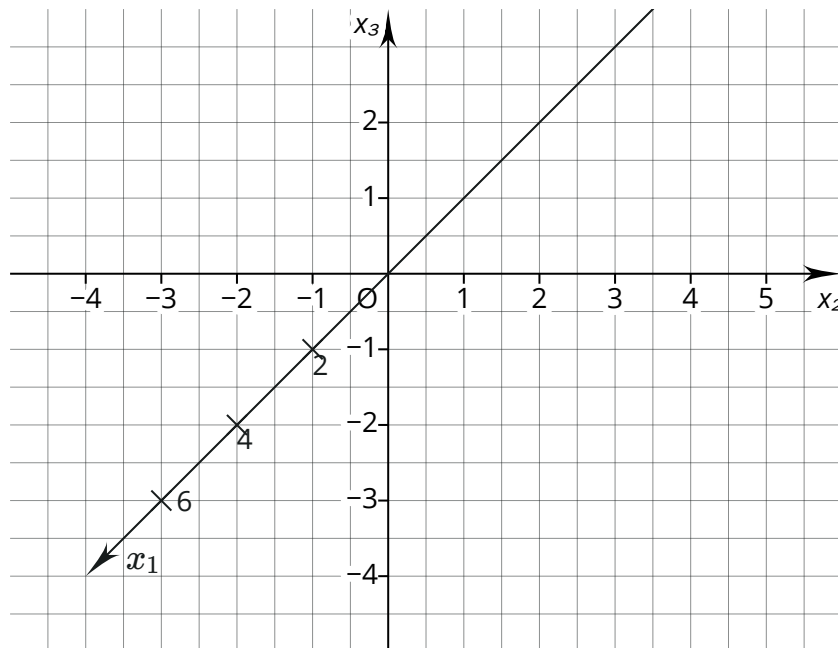
INPUT: Spurpunkte von Geraden

Mathematik Vektoren 12

Wie lassen sich Geraden mithilfe von Spurpunkten zeichnen?

Mithilfe der Spurpunkte können Geraden leicht gezeichnet werden. Man zeichnet zwei Spurpunkte in das Koordinatensystem und verbindet die Spurpunkte zur Geraden g

- ③ Die Gerade g hat die Spurpunkte $S_{12} = (2/3/0)$; $S_{13} = (1/0/1)$ und $S_{23} = (0/-3/2)$
- Zeichne die Spurpunkte in das Koordinatensystem
 - Verbinde die Spurpunkte zur Geraden g



- ④ Berechne die Spurpunkte der Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und skizziere die Gerade

INPUT: Spurpunkte von Geraden

Mathematik Vektoren 12

Lösung

Aufgabe 1

(1) Um den Spurpunkt S_{12} zu bestimmen, wird die Koordinate x_3 null gesetzt.

(2) Der Ortsvektor des Spurpunktes wird mit der Geradengleichung gleichgesetzt.

(3) Die dritte Zeile der Gleichung wird herausgeschrieben und der Wert für den Parameter berechnet.

(4) Der Parameter wird in die Geradengleichung eingesetzt um den Ortsvektor des Spurpunktes zu berechnen

(3) Der Spurpunkt wird notiert.

Aufgabe 2

Spurpunkt S_{23}

(1) $x_1 = 0$

(2)
$$\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(3) $0 = -2 + 2r$
 $\Rightarrow r = 1$

(4)
$$\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(5) $S_{23} = (0 / -2 / 3)$

Spurpunkt S_{13}

(1) $x_2 = 0$

(2)
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(3) $0 = -4 + 2r$
 $\Rightarrow r = 2$

(4)
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(5) $S_{13} = (2 / 0 / 2)$



INPUT: Spurpunkte von Geraden

Mathematik Vektoren 12

Aufgabe 4 $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$S_{12}: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad x_3 = 0$ kann man auch weglassen

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & -3 - 2t \quad | +3 \\ 3 & = & -2t \quad | :(-2) \\ -1,5 & = & t \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} - 1,5 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1,5 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow S_{12}(-1|1,5|0)$$

$S_{13}: x_2 = 0 \quad 3 + t = 0$
 $t = -3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow S_{13}(2|0|3)$$

$S_{23}: x_1 = 0 \quad -4 - 2t = 0 \quad | +4$
 $-2t = 4 \quad | :(-2)$
 $t = -2$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow S_{23}(0|1|1)$$

