

# INPUT: Spurpunkte von Geraden

Mathematik Vektoren 12

## ➡ Arbeitsauftrag

Erarbeite dir die Rechenregeln zu Spurpunkten von Geraden, indem du die Aufgaben löst. Wenn du nicht weiter kommst, findest du die Lösung am Ende des Dokuments.

### Beispielaufgabe

Gegeben ist die Gerade  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Ermittle die Spurpunkte.

### Was sind Spurpunkte?

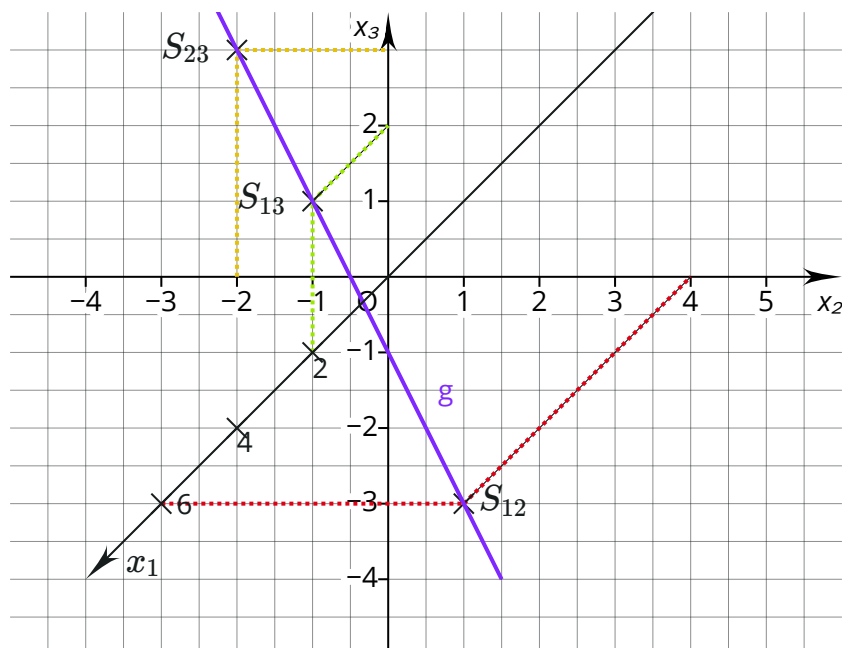
Als Spurpunkte werden die Schnittpunkte einer Geraden mit den Koordinatenebenen bezeichnet. Spurpunkte helfen, die Lage einer Geraden im dreidimensionalen Koordinatensystem zu verdeutlichen.

### Koordinatenebenen

$x_1x_2$ -Ebene: alle Punkte  $P(x_1/x_2/0)$  Spurpunkt  $S_{12}$

$x_2x_3$ -Ebene: alle Punkte  $P(0/x_2/x_3)$  Spurpunkt  $S_{23}$

$x_1x_3$ -Ebene: alle Punkte  $P(x_1/0/x_3)$  Spurpunkt  $S_{13}$



# INPUT: Spurpunkte von Geraden

Mathematik Vektoren 12

- ① Im Kasten wird der Spurpunkt der Geraden mit der  $x_1x_2$ -Ebene (oder auch  $xy$ -Ebene) berechnet. Erläutere das Vorgehen.

 Spurpunkt  $S_{12}$  der  $x_1x_2$ -Ebene

(1)  $x_3 = 0$

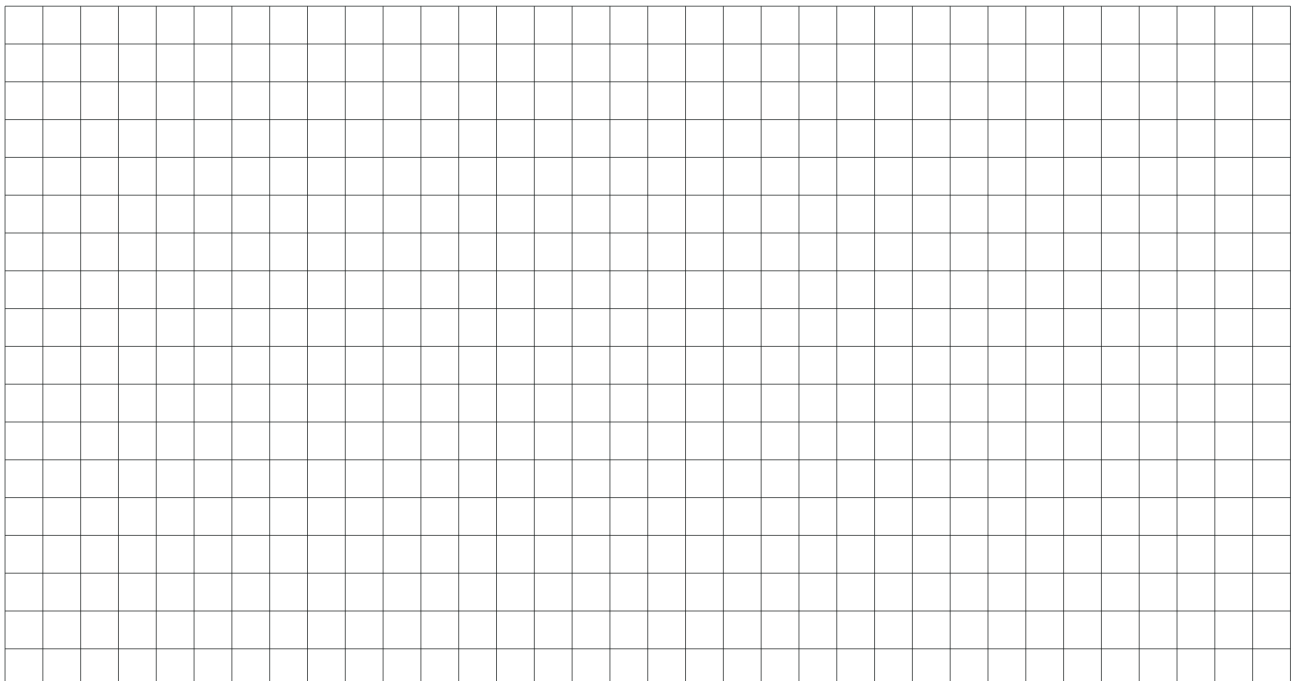
(2)  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(3)  $0 = 4 - r$   
 $\Rightarrow r = 4$

(4)  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

(5)  $S_{12} = (6/4/0)$

- ② Berechne die beiden anderen Spurpunkte  $S_{23}$  und  $S_{13}$  der in der Beispielaufgabe angegebenen Gerade.



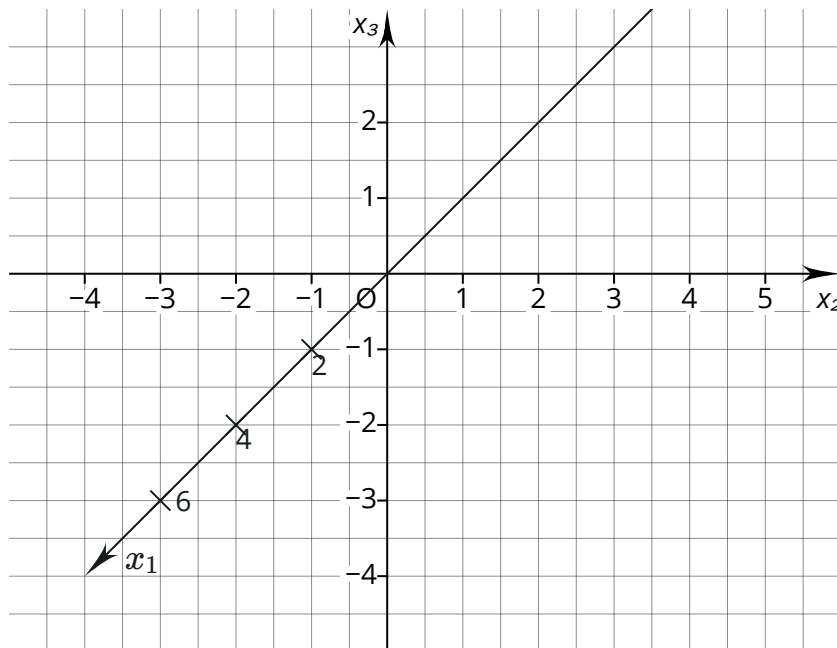
# INPUT: Spurpunkte von Geraden

Mathematik Vektoren 12

## Wie lassen sich Geraden mithilfe von Spurpunkten zeichnen?

Mithilfe der Spurpunkte können Geraden leicht gezeichnet werden. Man zeichnet zwei Spurpunkte in das Koordinatensystem und verbindet die Spurpunkte zur Geraden g

- ③ Die Gerade g hat die Spurpunkte  $S_{12} = (2/3/0)$ ;  $S_{13} = (1/0/1)$  und  $S_{23} = (0/-3/2)$
- Zeichne die Spurpunkte in das Koordinatensystem
  - Verbinde die Spurpunkte zur Geraden g



- ④ Berechne die Spurpunkte der Gerade g:  $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  und skizziere die Gerade

# INPUT: Spurpunkte von Geraden

Mathematik Vektoren 12

## Lösung

### Aufgabe 1

- (1) Um den Spurpunkt  $S_{12}$  zu bestimmen, wird die Koordinate  $x_3$  null gesetzt.
- (2) Der Ortsvektor des Spurpunktes wird mit der Geradengleichung gleichgesetzt.
- (3) Die dritte Zeile der Gleichung wird herausgeschrieben und der Wert für den Parameter berechnet.
- (4) Der Parameter wird in die Geradengleichung eingesetzt um den Ortsvektor des Spurpunktes zu berechnen
- (3) Der Spurpunkt wird notiert.

### Aufgabe 2

Spurpunkt  $S_{23}$

(1)  $x_1 = 0$

(2) 
$$\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(3)  $0 = -2 + 2r$   
 $\Rightarrow r = 1$

(4) 
$$\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(5)  $S_{23} = (0 / -2 / 3)$

Spurpunkt  $S_{13}$

(1)  $x_2 = 0$

(2) 
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(3)  $0 = -4 + 2r$   
 $\Rightarrow r = 2$

(4) 
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(5)  $S_{13} = (2 / 0 / 2)$



# INPUT: Spurpunkte von Geraden

Mathematik Vektoren 12

Aufgabe 4  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$S_{12}: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  kann man auch weglassen  $x_3 = 0$

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & -3 - 2t \quad | +3 \\ 3 & = & -2t \quad | :(-2) \\ -1,5 & = & t \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} - 1,5 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1,5 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow S_{12}(-1|1,5|0)$$

$S_{13}: x_2 = 0 \quad 3 + t = 0$   
 $t = -3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow S_{13}(2|0|3)$$

$S_{23}: x_1 = 0 \quad -4 - 2t = 0 \quad | +4$   
 $-2t = 4 \quad | :(-2)$   
 $t = -2$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow S_{23}(0|1|1)$$

