AB: Abstand zweier Funktionen

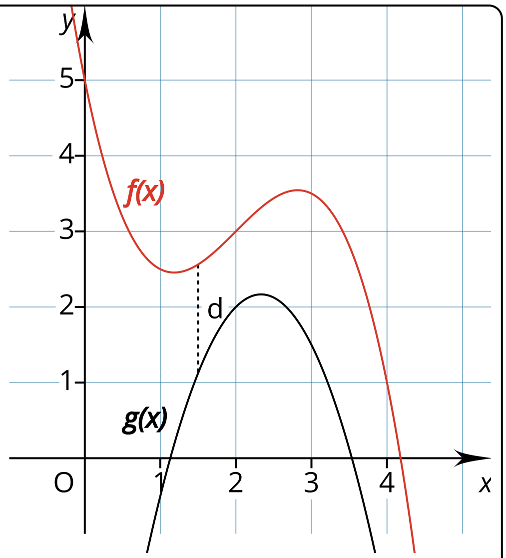
Mathematik Funktionen 11

Die Abbildung zeigt die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$.

$$f(x) = \text{-}0{,}5x^3 + 3x^2 - 5x + 5$$

$$g(x) = \text{-}1{,}5x^2 + 7x - 6$$

Berechne den minimalen vertikalen Abstand d der beiden Funktionen im Intervall $I = [0; 5]$.



Hinweis 1

Der Abstand der beiden Funktionen ist die Differenz der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$.

Hinweis 2

Mithilfe einer Differenzfunktion $d(x)$ lässt sich der Abstand für jeden beliebigen x-Wert bestimmen.

Hinweis 3

Um die Differenzfunktion zu bestimmen, werden die beiden Funktionen voneinander abgezogen: $d(x) = f(x) - g(x)$

Hinweis 4

Die Funktionsgleichung der Differenzfunktion ist:

$$\begin{aligned} d(x) &= \text{-}0{,}5x^3 + 3x^2 - 5x + 5 - (\text{-}1{,}5x^2 + 7x - 6) \\ &= \text{-}0{,}5x^3 + 4{,}5x^2 - 12x + 11 \end{aligned}$$

Hinweis 5

Um den geringsten Abstand zu finden, muss die Differenzfunktion auf Extremwerte untersucht werden.

Hinweis 6

Da ein Intervall angegeben ist, muss überprüft werden, ob der Abstand am Rand noch geringer ist.

Lösung

Um den Abstand an einer beliebigen Stelle zu bestimmen, wird die Differenzfunktion von $f(x)$ und $g(x)$ bestimmt:

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= \text{-}0{,}5x^3 + 3x^2 - 5x + 5 - (\text{-}1{,}5x^2 + 7x - 6) \\ &= \text{-}0{,}5x^3 + 4{,}5x^2 - 12x + 11 \end{aligned}$$

Gesucht ist der Tiefpunkt der Differenzfunktion. Daher wird die Funktion auf Extrempunkte untersucht. Die erste und zweite Ableitung sind:

$$d'(x) = \text{-}1{,}5x^2 + 9x - 12$$
$$d''(x) = \text{-}3x + 9$$

Die notwendige Bedingung für einen Extrempunkt lautet:

$$d'(x) = 0$$

Daraus ergibt sich die Gleichung:

$$\text{-}1{,}5x^2 + 9x - 12 = 0$$

Um die Gleichung zu lösen, wird die pq-Formel angewendet:

$$\begin{aligned} \text{-}1{,}5x^2 + 9x - 12 = &\quad 0 \mid : (\text{-}1{,}5) \\ x^2 - 6x + 8 = &\quad 0 \\ p = \text{-}6, q = 8 & \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = -\left(\tfrac{p}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q}$$
$$x_{1,2} = -\left(\tfrac{\text{-}6}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\tfrac{\text{-}6}{2}\right)^2 - 8}$$
$$x_1 = 2, x_2 = 4$$

Die hinreichende Bedingung für einen Extremwert lautet:

$$d''(x) \neq 0$$

Einsetzen der x-Werte in die zweite Ableitung führt zu:

$d''(2) = \text{-}3 \cdot 2 + 9 = 3 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt
$d''(4) = \text{-}3 \cdot 4 + 9 = \text{-}3 < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt

Da der Tiefpunkt gesucht ist, wird nur x_1 weiter untersucht. Der y-Wert wird bestimmt, indem der x-Wert in die Funktion eingesetzt wird:

$$d(2) = \text{-}0{,}5 \cdot 2^3 + 4{,}5 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 11 = 1$$

$$T(2|1)$$

Da ein Intervall für die Untersuchung vorgegeben ist, muss sichergestellt werden, dass der Abstand an den Intervallgrenzen nicht geringer ist als am berechneten Punkt. Um das zu prüfen, werden die Intervallgrenzen in die Differenzfunktion eingesetzt:

$$d(0) = \text{-}0{,}5 \cdot 0^3 + 4{,}5 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 + 11 = 11$$
$$d(5) = \text{-}0{,}5 \cdot 5^3 + 4{,}5 \cdot 5^2 - 12 \cdot 5 + 11 = 1$$

Die Rechnung zeigt, dass der Abstand zwar an der ersten Intervallgrenze größer ist, an der zweiten Intervallgrenze ist er jedoch gleich groß. Somit hat der geringste Abstand der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ im Intervall $I = [0; 5]$ die Größe 1 und wird an den Stellen $x = 2$ und $x = 5$ erreicht.