Die folgenden Aufgaben zeigen exemplarisch, wie das Thema in der Abiturprüfung abgefragt werden kann. Die **Aufgaben 1 bis 3** stammen aus dem Pflichtteil. Für die Lösung der Aufgaben sind **keine Hilfsmittel** zugelassen.

① Gegeben sind die Geraden $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ und

$h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$.

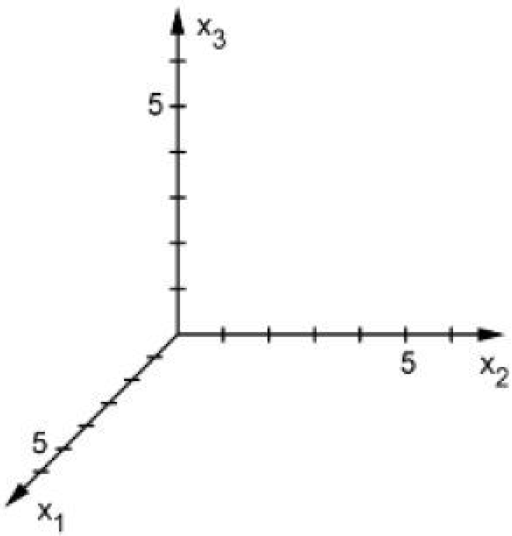
a) (1) Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von g und h an.

(2) Zeigen Sie, dass g und h senkrecht zueinander verlaufen.

b) Die Ebene E enthält die Geraden g und h. Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

(Konvolut Leistungsfach Mathematik ab 2023, Baden-Württemberg)

② Gegeben ist die Ebene $E\colon x_1 + x_2 + 2x_3 = 24$ und die Gerade $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.



a) Zeichnen Sie in die Abbildung die Schnittgerade von E mit der x_2x_3-Ebene ein.

b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von E und g.

(Konvolut Leistungskurs Mathematik Abitur 2021, Baden-Württemberg)

③ Gegeben ist die Ebene $E\colon 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -18$.

a) Der Schnittpunkt von E mit der x_1-Achse, der Schnittpunkt von E mit der x_2-Achse und der Koordinatenursprung sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

b) Ermitteln Sie die Koordinaten des Vektors, der sowohl ein Normalenvektor von E als auch der Ortsvektor eines Punkts der Ebene ist.

(Konvolut Leistungskurs Mathematik Abitur 2021, Baden-Württemberg)

Für die **Aufgaben 4 bis 7** darf ein **Taschenrechner** und die **mathematische Merkhilfe für die Abiturprüfung in Baden Württemberg** benutzt werden.
Du findest sie hier:

④ Gegeben ist der Punkt $R(4|\text{-}2|4)$ und die Ebenenschar $E_k: kx_1+kx_2+x_3=14$ mit $k\,\epsilon\,\mathbb{R}$.

a) (1) Beschreiben Sie die besondere Lage der Ebene E_0 im Koordinatensystem.

(2) Bestimmen Sie diejenige Schar, die den Punkt R enthält.

(3) Zeigen Sie, dass es eine Gerade g gibt, die in allen Ebenen der Schar liegt.

b) Gegeben sind die Spurpunkte $S_1(7|0|0)$, $S_2(0|7|0)$ und $S_3(0|0|14)$ einer Ebene E.

(1) Begründen Sie, dass die Ebene E eine Ebene der Schar ist.

(2) Betrachtet wird ein gerader Kegel mit der Spitze S_3, dessen Grundkreis in der x_1x_2-Ebene liegt. Die Punkte S_1 und S_2 liegen auf dem Grundkreis. Untersuchen Sie, ob der Punkt R innerhalb des Kegels liegt.

(3) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, die den Kegel in der Strecke $\overline{S_1S_3}$ berührt.

(Konvolut Leistungskurs Mathematik Abitur 2021, Baden-Württemberg)

⑤ Gegeben sind die Punkte $A(6|1|0)$, $B(4|5|\text{-}4)$ und $C(\text{-}2|8|2)$.

(1) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC bei B einen rechten Winkel besitzt.

(2) Die drei Punkte liegen in einer Ebene E. Bestimmen Sie die Koordinatengleichung von E.

(3) Es gibt einen Punkt D, für den das Viereck $ABCD$ ein Rechteck ist. Ermitteln Sie die Koordinaten von D.

(Konvolut Leistungskurs Mathematik Abitur 2021, Baden-Württemberg)

⑥ Zwei Schülerinnen lösen dasselbe lineare Gleichungssystem. Sie erhalten die Lösungsmengen $L_1=\{(2-r;1+r;3-r)|r\epsilon\,\mathbb{R}\}$ bzw. $L_2=\{(1-s;\text{-}s;4+s)|s\epsilon\,\mathbb{R}\}$.
Untersuchen Sie, ob diese Lösungsmengen identisch sind.

(Konvolut Leistungskurs Mathematik Abitur 2021, Baden-Württemberg)

⑦ Gegeben ist die Ebenenschar $E_k: 3x_1 + kx_2 - kx_3 = 6$ ($k \epsilon \mathbb{R}$) sowie die Gerade g durch die Punkte $P(4|7|7)$ und $Q(1|2|9)$.

a) Untersuchen Sie die Ebenen E_k der Schar auf Parallelität zur Geraden g und Orthogonalität zur Geraden g.

b) (1) Bestimmen Sie k so, dass E_k orthogonal zu E_1 ist.
(2) Untersuchen Sie, ob es eine Ebene E_k gibt, die zu keiner anderen Ebene der Schar orthogonal ist.

c) (1) Zeigen Sie, dass es eine Gerade h gibt, die in allen Ebenen E_k liegt.
(2) Ermitteln Sie die Gleichung einer Ebene F, die h enthält, aber nicht zur Ebenenschar E_k gehört.

d) Untersuchen Sie, welche Punkte der x_2x_3-Ebene in keiner Ebene E_k liegen.

(Konvolut Leistungskurs Mathematik Abitur 2021, Baden-Württemberg)

Lösungen

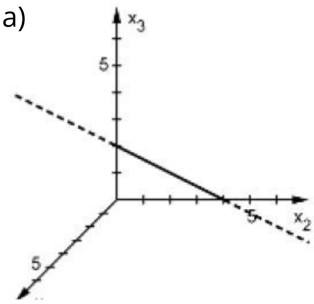
1. a1) $S(3|\text{-}3|3)$

a2) Nachweis mithilfe des Skalarproduktes:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ \text{-}1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ \text{-}3 \\ 3 \end{pmatrix} = 15 - 12 - 3 = 0$$

b) $E: 9x_1 - 14x_2 - 29x_3 = \text{-}18$

2. a)



b) $S(0|2|1)$

3. a) Schnittpunkte von E mit der x_1 und x_2-Achse: $S_1(\text{-}9|0|0)$ und $S_2(0|\text{-}18|0)$

Flächeninhalt: $A = 0{,}5 \cdot 9 \cdot 18 = 81$

b) Für jeden Normalenvektor von E gilt: $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 2r \\ r \\ \text{-}2r \end{pmatrix}$ mit $r \epsilon \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$2 \cdot 2r + r - 2 \cdot (\text{-}2r) = \text{-}18 \;\Rightarrow r = \text{-}2$$

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} \text{-}4 \\ \text{-}2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lösungen

4. a1) Die Ebene E_0 ist parallel zur x_1x_2-Ebene.

a2) Eine Punktprobe von R in E_k führt zu der Gleichung $4k - 2k + 4 = 14$ mit der Lösung $k = 5$. Die Ebene E_5 enthält den Punkt R.

a3) Die Gerade wird ermittelt, indem die Schnittgerade zweier beliebiger Ebenen der Ebenenschar bestimmt wird. Der Schnitt von E_0 und E_1 führt zum LGS

$$\begin{array}{lccccccc} I. & & & & & 1x_3 & = & 14 \\ II. & 1x_1 & + & 1x_2 & + & 1x_3 & = & 14 \end{array}$$

mit der Lösungsmenge $L = \{t; \text{-}t, 14\}$.

Daraus lässt sich die Gerade g aufstellen:

$$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \text{-}t \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 1t \\ 0 - 1t \\ 14 + 0t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \text{-}1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Gerade g liegt in jeder Ebene der Schar, da für jedes $k \in \mathbb{R}$ und jedes $t \in \mathbb{R}$ eine wahre Aussage entsteht:

$k \cdot (0 + t) + k \cdot (0 - t) + 14 = 14$

$14 = 14 \quad \checkmark$

b1) Punktprobe $S_1 \in E_k$ liefert $k = 2$. Punktproben ergeben, dass S_2 und S_3 ebenfalls in der Ebene E_2 liegen.

b2) Aus den Spurpunkten ergibt sich, dass der Grundkreis den Mittelpunkt $O(0|0|0)$ und den Radius $r = 7$ hat. Durch die Punkte S_3 und R wird eine Hilfsgerade aufgestellt:

$$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ \text{-}2 \\ \text{-}10 \end{pmatrix}$$

Nun wird geprüft, ob der Spurpunkt der Hilfsgeraden in der x_1x_2-Ebene innerhalb des Grundkreises liegt. Als Spurpunkt ergibt sich $P(5{,}6|\text{-}2{,}8|0)$. Der Abstand zum Mittelpunkt ist

$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{5{,}6^2 + (\text{-}2{,}8)^2 + 0^2} \approx 6{,}62$

Da $6{,}62 < r$ liegt P innerhalb des Grundkreises und somit der Punkt R innerhalb des Kegels.

Lösungen

b3) Die gesuchte Ebene F enthält die Punkte S_1 und S_3 und ist parallel zur x_2-Achse. Der Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ lässt sich als Vektorprodukt der Vektoren $\overrightarrow{S_1S_3}$ und einem Vektor, der in x_2-Richtung zeigt, bestimmen:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Mit dem Normalenvektor und dem Punkt S_3 ergibt sich die Ebenengleichung:

$F: 2x_1 + x_3 = 14$

5. (1) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$

(2) $E: 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 14$

(3) $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}; D(0|4|6)$

6. Die beiden Lösungsmengen lassen sich als Geraden interpretieren:

$$g\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die Untersuchung der Geraden zeigt, dass diese identisch sind. Somit sind auch die Lösungsmengen identisch.

Lösungen

7. a) Untersuchung auf Parallelität

Normalenvektor der Ebenenschar:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ k \\ -k \end{pmatrix}$$

Richtungsvektor der Geraden:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Wenn die Ebene und die Gerade parallel zueinander sind, müssen der Normalenvektor der Ebene und der Richtungsvektor der Geraden senkrecht zueinander sein, also ein Skalarprodukt haben, das null ist.

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ k \\ -k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$-9 - 5k - 2k = 0$$
$$k = -\frac{9}{7}$$

Die Ebene $E_{-\frac{9}{7}}$ und die Gerade g sind parallel zueinander.

Untersuchung auf Orthogonalität

Die Gerade und die Ebene sind orthogonal zueinander, wenn der Normalenvektor der Ebene und der Richtungsvektor der Geraden linear abhängig sind:

$$r \cdot \vec{n} = \overrightarrow{PQ}$$

$$r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ k \\ -k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} I.\ \ 3r &= -3 \Rightarrow r = -1 \\ II.\ \ rk &= -5 \Rightarrow k = 5 \\ III.\ -rk &= \ \ 2 \Rightarrow k = 2 \end{aligned}$$

Da sich für k unterschiedliche Werte ergeben, gibt es einen Widerspruch. Keine Ebene der Ebenenschar E_k ist orthogonal zu g.

Lösungen
7. b1) $E_1: 3x_1 + 1x_2 - 1x_3 = 6$

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_k} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ k \\ -k \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{9}{2}$$

Die Ebene $E_{-\frac{9}{2}}$ ist orthogonal zu E_1.

b2) $\overrightarrow{n_{k1}} \cdot \overrightarrow{n_{k2}} = \begin{pmatrix} 3 \\ k_1 \\ -k_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ k_2 \\ -k_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 9 + 2k_1k_2 = 0$

Für $k_1 = 0$ ergibt sich für die Gleichung $9 + 2k_1k_2 = 0$ ein Widerspruch. Somit ist die Ebene E_0 zu keiner anderen Ebene der Schar orthogonal.

c1) Für die Schnittgerade der Ebenen E_0 und E_1 ergibt sich:

$$h: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Schnittgerade wird in die Ebenenschar eingesetzt:
$3 \cdot 2 + k \cdot t - k \cdot t = 6$
$6 = 6 \;\; \checkmark$

Es entsteht eine wahre Aussage, die Schnittgerade liegt in allen Ebenen der Schar.

c2) Alle Ebenen, die die Gerade h enthalten, enthalten den Punkt $R(2|0|0)$. Darüber hinaus ist ihr Normalenvektor senkrecht zum Richtungsvektor der Geraden. Alle Vektoren der Form $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ k \\ -k \end{pmatrix}$ erfüllen diese Bedingung. In der Ebenenschar E_k ist $a = 3$. Somit muss für den Normalenvektor der Ebene F gelten: $a \neq 3$. Eine mögliche Lösung ist:

$$F: \left(\overrightarrow{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Hinweis
Da der Nullvektor kein Normalenvektor sein kann, dürfen a und k nicht beide null sein.

Lösungen

7. d) Für alle Punkte der x_2x_3-Ebene gilt: $S(0|x_2|x_3)$. Mit diesem Punkt wird eine Punktprobe durchgeführt:

$3 \cdot 0 + kx_2 - kx_3 = 6$

$kx_2 - kx_3 = 6$

$k \cdot (x_2 - x_3) = 6$

Für $x_2 = x_3$ hat diese Gleichung keine Lösung.

Somit sind die Punkte, die in keiner Ebene der Schar liegen, alle Punkte für die gilt: $S(0|x_2|x_2)$ mit $x_2 \epsilon \mathbb{R}$.