

Begründe oder widerlege die Aussagen.

- a) Jede ganzrationale Funktion dritten Grades hat genau einen Wendepunkt oder Sattelpunkt.
- b) Jede ganzrationale Funktion vierten Grades hat genau drei Extrempunkte.
- c) Zwischen zwei Wendestellen liegt bei ganzrationalen Funktionen immer eine Extremstelle.
- d) Zwischen zwei Extremstellen liegt bei ganzrationalen Funktionen immer eine Wendestelle.

**Hinweis 1 (Teilaufgabe a)**

Eine ganzrationale Funktion dritten Grades lässt sich in der Form

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ schreiben.}$$

**Hinweis 2 (Teilaufgabe a)**

Wenn eine Wendestelle vorliegt, darf die Gleichung, die sich aus der notwendigen Bedingung ergibt, keine leere Lösungsmenge haben.

**Hinweis 3 (Teilaufgabe b)**

Die notwendige Bedingung für eine Extremstelle ist, dass die erste Ableitung null ist.

**Hinweis 4 (Teilaufgabe b)**

Die erste Ableitung einer Funktion vierten Grades ist eine Funktion dritten Grades.

**Hinweis 5 (Teilaufgabe b)**

Jede Funktion hat maximal so viele Nullstellen wie ihr Grad ist.

**Hinweis 6 (Teilaufgabe c)**

In einem Hochpunkt ist eine Funktion rechtsgekrümmt, wohingegen sie in einem Tiefpunkt linksgekrümmt ist.

**Hinweis 7 (Teilaufgabe c)**

In einem Wendepunkt ändert sich die Krümmung der Funktion.

**Hinweis 8 (Teilaufgabe d)**

Wenn eine Funktion zwei Extrempunkte hat, muss es sich um einen Hochpunkt und einen Tiefpunkt handeln, da weder zwei Hochpunkte noch zwei Tiefpunkte direkt aufeinander folgen können.



Lösung

a) Die Aussage ist wahr. Die allgemeine Funktionsgleichung für eine ganzrationale Funktion dritten Grades ist:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Die Ableitungen sind:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

Die notwendige Bedingung für einen Wendepunkt ist:

$$f''(x) = 0$$

Daraus folgt die Gleichung:

$$6ax + 2b = 0$$

Diese Gleichung ist immer eindeutig lösbar, sofern $a \neq 0$ ist. Das ist gegeben. Wäre $a = 0$ würde es sich nicht um eine Funktion dritten Grades handeln.

b) Die Aussage ist falsch. Die allgemeine Funktionsgleichung für eine ganzrationale Funktion vierten Grades ist

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

Die erste Ableitung lautet:

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

Die notwendige Bedingung für einen Extrempunkt ist:

$$f'(x) = 0$$

Daraus folgt die Gleichung:

$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d = 0$$

Eine solche Gleichung kann bis zu drei Lösungen haben. Es können aber auch weniger sein. So hat die Gleichung zum Beispiel für $a \neq 0, b = c = d = 0$ nur eine Lösung. Die korrekte Aussage wäre daher: Jede ganzrationale Funktion vierten Grades hat *höchstens* drei Extrempunkte.

c) Die Aussage ist falsch. Die Abbildung zeigt beispielhaft eine Funktion, die drei Wendepunkte, aber keinen Extrempunkt hat. Es handelt sich um eine Funktion elften Grades.



d) Die Aussage ist wahr. Ein Hochpunkt befindet sich immer in einem rechtsgekrümmten Bereich einer Funktion, ein Tiefpunkt immer in einem linksgekrümmten Bereich. Damit die Funktion zwei Extremstellen, also einen Hochpunkt und einen Tiefpunkt haben kann, muss sich die Krümmung zwischen den beiden Punkten ändern. Einen Sonderfall stellt das Vorhandensein von Sattelpunkten dar. Hat eine Funktion zwei Sattelpunkte, befindet sich dazwischen kein Extrempunkt.