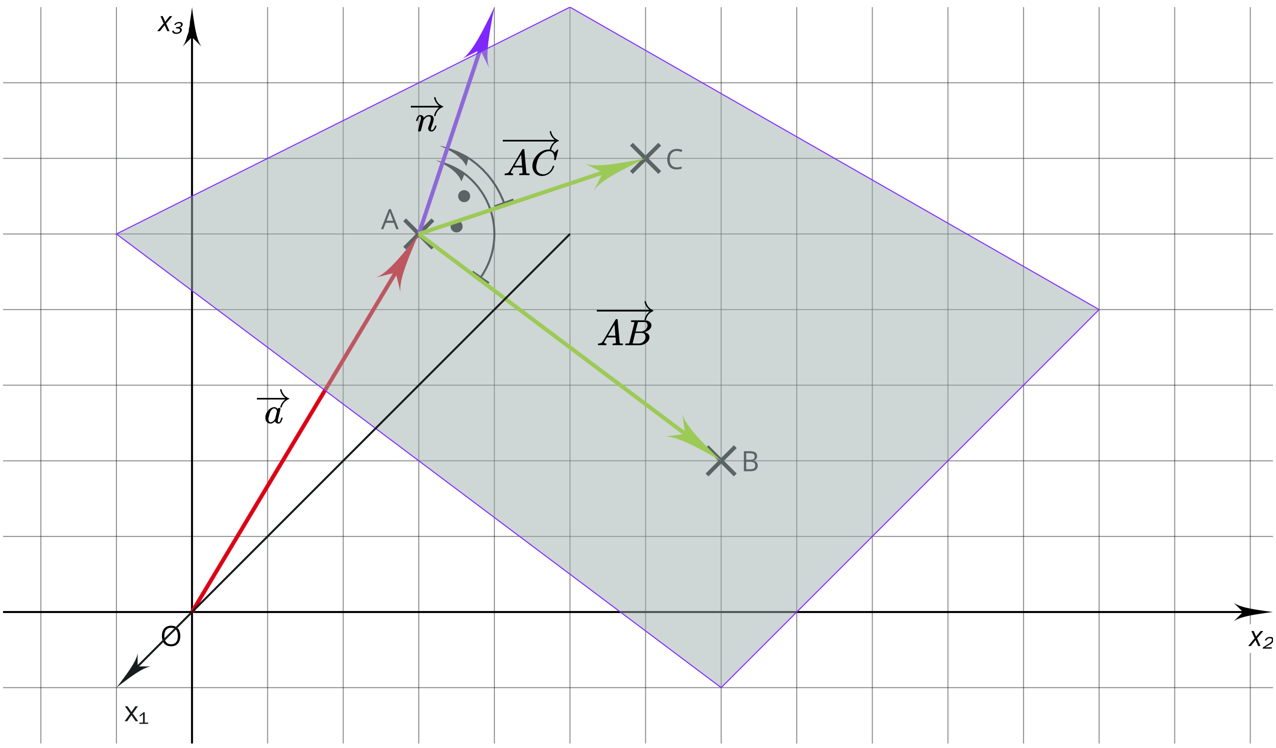
INFO: Die Koordinatengleichung

Mathematik Vektoren 12

Ebenengleichungen lassen sich mithilfe eines Stützvektors und zwei Spannvektoren aufstellen. Diese Form der Darstellung heißt Parametergleichung einer Ebene, da sie zwei Parameter enthält. Der Vorteil dieser Darstellung ist, dass sie sehr anschaulich ist. Eine alternative Darstellungsform von Ebenen ist die Koordinatengleichung, mit der viele Rechnungen einfacher und schneller ausgeführt werden können.

Die allgemeine Form der Koordinatengleichung lautet:
$E\colon n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$

Dabei sind x_1, x_2 und x_3 die Koordinaten eines beliebigen Punktes $X(x_1|x_2|x_3)$, der in der Ebene liegt. n_1, n_2 und n_3 sind die Koordinaten eines Normalenvektors der Ebene $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$. Ein Normalenvektor ist ein Vektor, der senkrecht auf der Ebene steht. Er gibt die Neigung der Ebene an. Der Wert d beschreibt die Position der Ebene im Koordinatensystem. So haben parallele Ebenen den gleichen Normalenvektor, aber unterschiedliche Werte für d.



Da das Vektorprodukt der Spannvektoren einen Vektor ergibt, der senkrecht auf der Ebene steht, lässt sich ein Normalenvektor der Ebene als Vektorprodukt der beiden Spannvektoren errechnen:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$$

Um d zu bestimmen werden die Koordinaten eines beliebigen Punktes, der in der Ebene liegt, in die Koordinatengleichung eingesetzt.

Beispielaufgabe

Gegeben ist die Ebene $E\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

a) Wandle die Ebene in eine Koordinatengleichung um.
b) Bestimme mithilfe der Koordinatengleichung drei Punkte, die in der Ebene E liegen.

Rechenweg

a) Ein Normalenvektor der Ebene wird berechnet, indem das Vektorprodukt der beiden Spannvektoren berechnet wird:

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten des Normalenvektors werden in die Koordinatengleichung eingesetzt:

$$E\colon n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$$

$$E\colon 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = d$$

Der Stützvektor der Ebene $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ führt zu einem Punkt, der in der Ebene liegt. Seine Koordinaten können daher für x_1, x_2 und x_3 eingesetzt werden, um d zu berechnen:

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 - 2 \cdot 3 = d$$
$$d = -4$$

Der Wert von d wird in die Ebenengleichung eingesetzt. Nun liegt die Ebene als Koordinatengleichung vor:

$$E\colon 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -4$$

b) Ein Punkt liegt in der Ebene, wenn er die Gleichung erfüllt, also beim Einsetzen der Koordinaten eine wahre Aussage entsteht. Der Punkt $A(-2|0|0)$ liegt in der Ebene, da gilt:

$$2 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = -4 \checkmark$$

Ebenso lässt sich zeigen, dass die Punkte $B(0|0|2)$ und $C(-1|0|1)$ in der Ebene liegen.

INFO: Die Koordinatengleichung

Mathematik Vektoren 12

Können zwei unterschiedliche Koordinatengleichungen zu identischen Ebenen gehören?

Koordinatengleichungen dürfen wie andere Gleichungen umgeformt werden, indem sie mit einem Faktor multipliziert werden. Die beiden folgenden Ebenengleichungen beschreiben daher identische Ebenen.

$$E_1: 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = \text{-}4$$

$$E_2: 4x_1 + 6x_2 - 4x_3 = \text{-}8$$

E_1 wurde mit dem Faktor 2 multipliziert, um E_2 zu erhalten.

Wie wird mit einer Koordinatengleichung eine Punktprobe gemacht?

Um zu prüfen, ob ein Punkt in der Ebene liegt, werden seine Koordinaten in die Koordinatengleichung eingesetzt. Nur wenn sich daraus eine wahre Aussage ergibt, liegt der Punkt in der Ebene.

Beispielaufgabe
Untersuche, ob die Punkte $P(-4|2|1)$ und $Q(0|1|2)$ in der Ebene $E: 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -4$ liegen.

Rechenweg

<u>Untersuchung von P</u>

Die Koordinaten des Punktes P werden in die Ebene eingesetzt:

$$2 \cdot (\text{-}4) + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = \text{-}4$$
$$\text{-}4 = \text{-}4 \checkmark$$

Die Aussage ist wahr. Der Punkt P liegt in der Ebene E.

<u>Untersuchung von Q</u>

Die Koordinaten des Punktes Q werden in die Ebene eingesetzt:

$$2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = \text{-}4$$
$$\text{-}1 \neq \text{-}4$$

Die Aussage ist falsch. Der Punkt Q liegt nicht in der Ebene E.