INPUT: Die Normalengleichung

Mathematik Vektoren 12

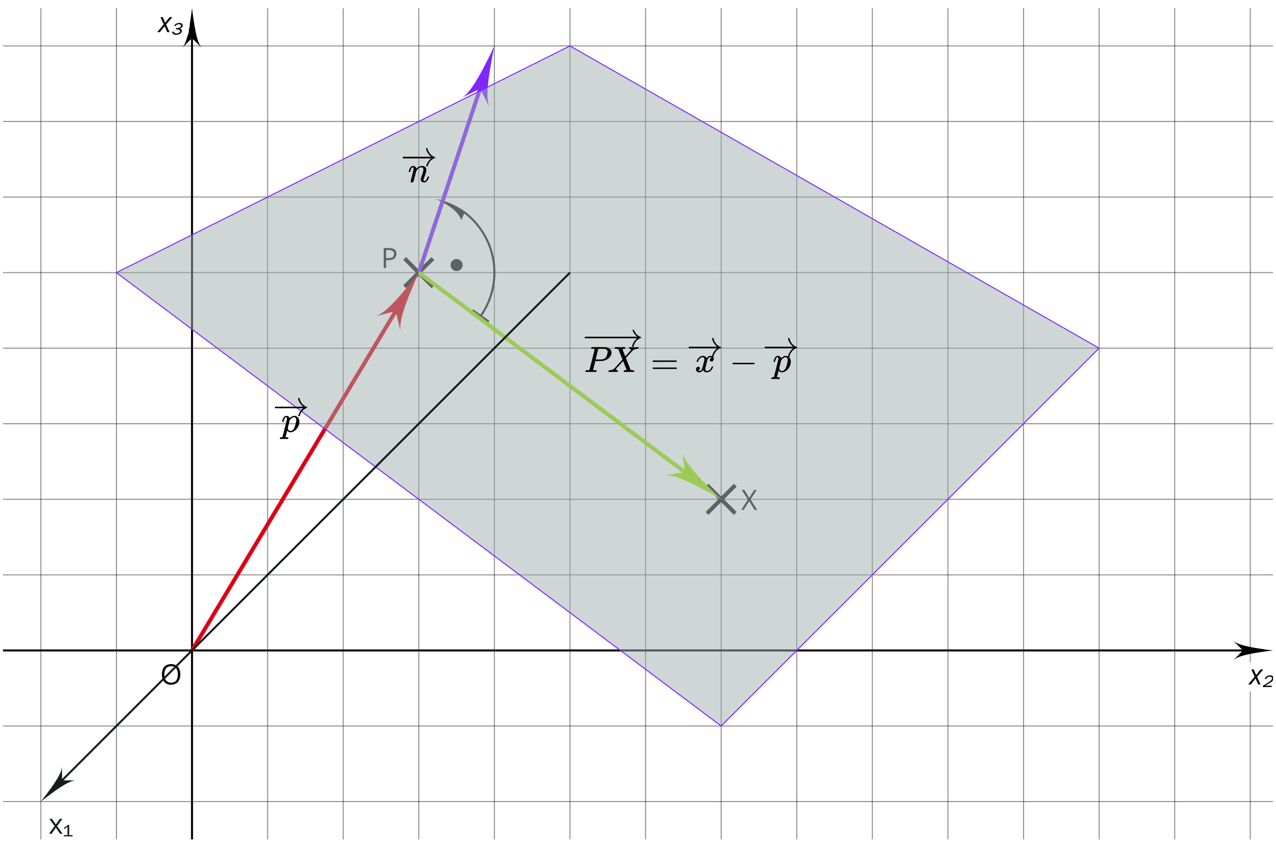
Arbeitsauftrag

Erarbeite dir die Regeln zum Aufstellen einer Normalengleichung, indem du die Aufgaben löst. Wenn du nicht weiter kommst, findest du die Lösungen am Ende des Dokuments.

Neben der Parametergleichung und der Koordinatengleichung gibt es noch eine dritte Möglichkeit, Ebenengleichungen anzugeben: Die Normalengleichung. Die allgemeine Form der Normalengleichung lautet:

$$E: (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{p}) \cdot \overrightarrow{n} = 0$$

Dabei ist $\overrightarrow{x}$ wie schon bei der Parametergleichung der Ortsvektor eines beliebigen Punktes der Ebene. Für $\overrightarrow{p}$ wird der Ortsvektor eines Punktes P eingesetzt, der in der Ebene E liegt, $\overrightarrow{n}$ ist ein Normalenvektor der Ebene.



Der Normalenvektor der Ebene $\overrightarrow{n}$ steht senkrecht auf dem Vektor $\overrightarrow{PX}$, sodass das Skalarprodukt der beiden Vektoren null ist.

INPUT: Die Normalengleichung

Mathematik Vektoren 12

① Die Beispielaufgabe zeigt die Umwandlung einer Ebene von der Parametergleichung in die Normalengleichung. Beschreibe die Vorgehensweise.

Beispielaufgabe

Gegeben ist die Ebene $E\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Wandle die Parametergleichung der Ebene in eine Normalengleichung um.

Umwandlung von der Parametergleichung in die Normalengleichung

(1) $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

(2) $E\colon \left(\overrightarrow{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$

② Die Beispielaufgabe zeigt die Umwandlung einer Ebene von der Normalengleichung in die Parametergleichung und die Koordinatengleichung. Beschreibe die Vorgehensweise.

Beispielaufgabe

Gegeben ist die Ebene $E\colon \left(\overrightarrow{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 0.$

Wandle die Normalengleichung der Ebene in eine Parametergleichung und in eine Koordinatengleichung um.

INPUT: Die Normalengleichung

Mathematik Vektoren 12

Umwandlung von der Normalengleichung in die Parametergleichung

(1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{n} = 0$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{n} = 0$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \qquad \overrightarrow{AC} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(2) $E\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Rechentrick
Ein Vektor, der senkrecht auf einem anderen steht, lässt sich leicht bestimmen:
1. Die Koordinate in einer beliebigen Zeile null setzen.
2. Die beiden Koordinaten der übrigen Zeilen vertauschen.
3. Bei einer der beiden Koordinaten das Vorzeichen ändern.

Umwandlung von der Normalengleichung in die Koordinatengleichung

(1) $E\colon \overrightarrow{x} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$

(2) $E\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - (-4) = 0 \quad | -4$

(3) $E\colon 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -4$

Bei den Schritten (1) und (2) wird jeweils ein Skalarprodukt berechnet.

③ Die Beispielaufgabe zeigt, wie eine Punktprobe mithilfe der Normalengleichung durchgeführt wird. Beschreibe die Vorgehensweise.

Beispielaufgabe

Untersuche, ob die Punkte $P(-4|2|1)$ und $Q(0|1|2)$ in der Ebene

$E\colon \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$ liegen.

Rechenweg

Untersuchung von P

$$\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

$0 = 0$ ✓ $\quad \Rightarrow P$ liegt in der Ebene E.

Untersuchung von Q

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

$3 \neq 0 \quad \Rightarrow Q$ liegt nicht in der Ebene E.

Lösung

Aufgabe 1

(1) Ein Normalenvektor der Ebene wird berechnet, indem das Vektorprodukt der beiden Spannvektoren berechnet wird.
(2) In die Normalengleichung wird der Stützvektor der Ebene aus der Parametergleichung für $\overrightarrow{p}$ eingesetzt, da er zu einem Punkt führt, der in der Ebene liegt. Für den Normalenvektor werden die Werte eingesetzt, die mit dem Vektorprodukt bestimmt wurden.

Aufgabe 2

Umwandlung von der Normalengleichung in die Parametergleichung

(1) Zwei Spannvektoren der Ebene werden bestimmt. Sie müssen senkrecht zum Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ sein.

(2) $\overrightarrow{p}$ wird als Stützvektor in die Ebene eingesetzt, die Spannvektoren werden ebenfalls eingesetzt.

Umwandlung von der Normalengleichung in die Koordinatengleichung

(1) Die Klammer wird ausmultipliziert (Distributivgesetz).

(2) $\overrightarrow{x}$ wird durch $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ersetzt, das Skalarprodukt wird berechnet.

(3) Auflösen des Skalarprodukts und Umstellen der Gleichung ergibt die Normalengleichung.

Aufgabe 3
Die Ortsvektoren der zu untersuchenden Punkte werden in die Normalengleichung der Ebene für $\overrightarrow{x}$ eingesetzt. Wenn sich daraus eine wahre Aussage ergibt, liegt der Punkt in der Ebene. Ergibt sich hingegen eine falsche Aussage, liegt der Punkt nicht in der Ebene.