INFO: Ebenengleichungen umwandeln

Mathematik Vektoren 12

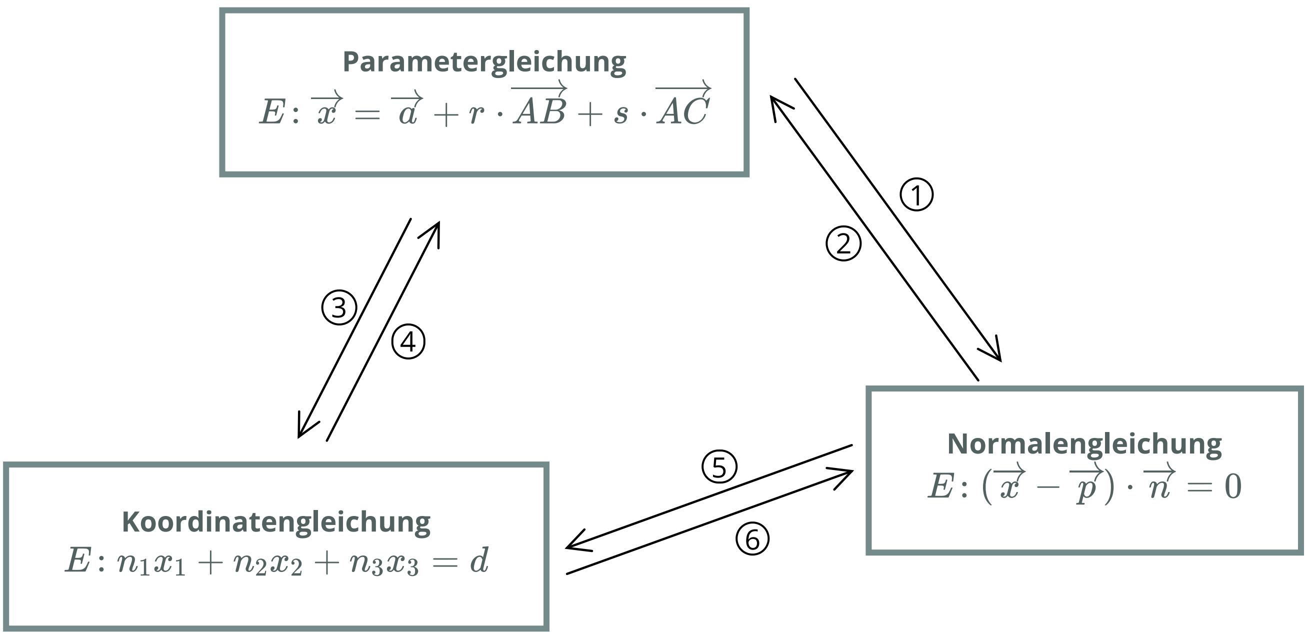
Mit drei Punkten wird eine Ebene festgelegt, sofern sie nicht auf einer Geraden liegen. Jede Ebene lässt sich als Parametergleichung, Koordinatengleichung und Normalengleichung darstellen. Dabei gehört der Ortsvektor $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ zu einem Punkt $X(x_1|x_2|x_3)$, der in der Ebene liegt.

Die **Parametergleichung** $E\colon \overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$ enthält einen Stützvektor $(\overrightarrow{a})$ und zwei Spannvektoren $(\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC})$ sowie zwei Parameter $(r$ und $s)$.

Aus einer **Koordinatengleichung** $E\colon n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$ kann der Normalenvektor $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ direkt abgelesen werden. Ein Normalenvektor steht senkrecht auf der Ebene. Mindestens eine der Koordinaten n_1, n_2 und n_3 muss ungleich null sein.

Die **Normalengleichung** $E\colon (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{p}) \cdot \overrightarrow{n} = 0$ enthält ebenfalls den Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ sowie einen Ortsvektor $\overrightarrow{p}$, der zu einem Punkt P gehört, der in der Ebene liegt.

Alle Darstellungsformen lassen sich ineinander umwandeln:



INFO: Ebenengleichungen umwandeln

Mathematik Vektoren 12

① Parametergleichung → Normalengleichung

(1) Einen Normalenvektor $\vec{n}$ als Kreuzprodukt der beiden Spannvektoren berechnen.

(2) Den Ortsvektor eines zur Ebene gehörenden Punktes und den Normalenvektor in die Normalengleichung einsetzen.

Beispiel

$$E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(1) $$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2) $$E\colon \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

② Normalengleichung → Parametergleichung

(1) Zwei Vektoren ermitteln, die senkrecht zum Normalenvektor sind. Diese beiden Vektoren dürfen nicht linear abhängig sein.

(2) Den Ortsvektor eines zur Ebene gehörenden Punktes als Stützvektor in die Parametergleichung einsetzen, die beiden zum Normalenvektor senkrechten Vektoren als Spannvektoren in die Parametergleichung einsetzen.

Rechentrick

Ein Vektor, der senkrecht auf einem anderen steht, lässt sich leicht bestimmen:

1. Die Koordinate in einer beliebigen Zeile null setzen.
2. Die beiden Koordinaten der übrigen Zeilen vertauschen.
3. Bei einer der beiden Koordinaten das Vorzeichen ändern.

Beispiel

$$E\colon \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

(1) $$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2) $$E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

③ **Parametergleichung → Koordinatengleichung**

(1) Den Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ als Kreuzprodukt der beiden Spannvektoren berechnen.
(2) Den Ortsvektor eines zur Ebene gehörenden Punktes sowie die Koordinaten des Normalenvektors in die Koordinatengleichung einsetzen, um d zu bestimmen.
(3) Die Koordinaten des Normalenvektors und d in die Koordinatengleichung einsetzen.

Beispiel

$$E: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(1) $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $-1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 6 = d = 6$

(3) $E: -1x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 6$

④ **Koordinatenengleichung → Parametergleichung**

(1) Drei Punkte ermitteln, die in der Ebene liegen.
(2) Zwei Verbindungsvektoren zwischen den Punkten bestimmen.
(3) Den Ortsvektor eines Punktes als Stützvektor und die Verbindungsvektoren als Spannvektoren in die Parametergleichung einsetzen.

Beispiel

$$E: -1x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 6$$

(1) $A(-6|0|0)$; $B(0|3|0)$; $C(0|0|6)$

(2) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

(3) $E: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

⑤ **Normalengleichung → Koordinatengleichung**

(1) Die Klammer mithilfe des Distributivgesetzes auflösen.
(2) Die beiden Skalarprodukte berechnen.
(3) Den Wert d auf die rechte Seite der Gleichung bringen.

Beispiel

$$E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

(1) $E: \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

(2) $E: -1x_1 + 2x_2 + 1x_3 - 6 = 0$

(3) $E: -1x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 6$

⑥ **Koordinatengleichung → Normalengleichung**

(1) Einen Punkt ermitteln, der in der Ebene liegt.
(2) Den Normalenvektor aus der Koordinatengleichung ablesen.
(3) Den Ortsvektor des Punktes und den Normalenvektor in die Normalengleichung einsetzen.

Beispiel

$$E: -1x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 6$$

(1) $A(-6|0|0)$

(2) $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(3) $E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$