

Das folgende lineare Gleichungssystem (LGS) mit drei Gleichungen soll gelöst werden. Dabei werden durch geschickte Addition im ersten Schritt zwei Gleichungen mit zwei Variablen und im zweiten Schritt aus diesen beiden Gleichungen eine Gleichung mit einer Variablen erzeugt. Dieses strukturierte Vorgehen wird als **Gaußverfahren** bezeichnet.

$$\begin{array}{l} \text{I. } 4x_1 + 1x_2 - 1x_3 = 3 \\ \text{II. } 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -4 \\ \text{III. } 1x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{I. } 4x_1 + 1x_2 - 1x_3 = 3 \quad | \cdot (-1) \\ \text{II. } 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -4 \quad | \cdot 2 \\ \text{III. } 1x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 5 \quad | \cdot 4 \end{array}$$

Um das Additionsverfahren anwenden zu können, werden die Gleichungen so multipliziert, dass der Koeffizient vor x_1 in allen drei Gleichungen gleich ist. Gleichung I wird dann mit -1 multipliziert, sodass die x_1 -Werte beim Addieren rausfallen.

$$\begin{array}{l} \text{I}_a. -4x_1 - 1x_2 + 1x_3 = -3 \\ \text{II}_a. 4x_1 - 4x_2 - 8x_3 = -8 \quad | \text{I}_a + \text{II}_a \\ \text{III}_a. 4x_1 + 12x_2 + 12x_3 = 20 \quad | \text{I}_a + \text{III}_a \end{array}$$

Nun werden die Gleichungen addiert. Die erste Zeile bleibt unverändert stehen.

$$\begin{array}{l} \text{I}_b. -4x_1 - 1x_2 + 1x_3 = -3 \\ \text{II}_b. \quad -5x_2 - 7x_3 = -11 \quad | \cdot 11 \\ \text{III}_b. \quad 11x_2 + 13x_3 = 17 \quad | \cdot 5 \end{array}$$

Das LGS besteht nun aus einer Gleichung mit drei Variablen und zwei Gleichungen mit zwei Variablen. Diese beiden Gleichungen werden multipliziert, sodass es sich bei den Koeffizienten vor x_2 um Zahl und Gegenzahl handelt.

$$\begin{array}{l} \text{I}_c. -4x_1 - 1x_2 + 1x_3 = -3 \\ \text{II}_c. \quad -55x_2 - 77x_3 = -121 \quad | : 11 \\ \text{III}_c. \quad 55x_2 + 65x_3 = 85 \quad | \text{II}_c + \text{III}_c \end{array}$$

Wenn die Werte wie in diesem Beispiel durch die Multiplikation recht hoch werden, kann anschließend wieder dividiert werden. So kann später mit den kleineren Koeffizienten in der zweiten Zeilen leichter gerechnet werden.

$$\begin{array}{lclcl}
 I_d. & -4x_1 & - & 1x_2 & + & 1x_3 & = & -3 \\
 II_d. & & & -5x_2 & - & 7x_3 & = & -11 \\
 III_d. & & & & & -12x_3 & = & -36
 \end{array}$$

Das LGS besteht nun aus einer Gleichung mit drei Variablen, einer Gleichung mit zwei Variablen und einer Gleichung mit einer Variablen. Diese Darstellung wird als **Stufenform** bezeichnet.

$$\begin{array}{lclcl}
 III_d. & & & -12x_3 & = & -36 & | : (-12) \\
 & & & x_3 & = & 3
 \end{array}$$

Die letzte Gleichung enthält nur eine Variable. Sie wird nach x_3 umgestellt.

$$\begin{array}{lclcl}
 II_d. & -5x_2 & - & 7 \cdot 3 & = & -11 \\
 & -5x_2 & - & 21 & = & -11 & | + 21 \\
 & -5x_2 & & & = & 10 & | : (-5) \\
 & x_2 & & & = & -2
 \end{array}$$

Der Wert von x_3 wird in die zweite Gleichung eingesetzt, um x_2 zu erhalten.

$$\begin{array}{lclcl}
 I_d. & -4x_1 & - & 1 \cdot (-2) & + & 1 \cdot 3 & = & -3 \\
 & -4x_1 & & & + & 5 & = & -3 & | - 5 \\
 & -4x_1 & & & & & = & -8 & | : (-4) \\
 & x_1 & & & & & = & 2
 \end{array}$$

Nun fehlt nur noch der Wert für x_1 . Er lässt sich bestimmen, indem x_2 und x_3 in die erste Gleichung eingesetzt werden.

$$L = \{2; -2; 3\}$$

Wenn alle Variablen bekannt sind, wird die Lösungsmenge angegeben.

$$\begin{array}{lclcl}
 I. & 4 \cdot 2 & + & 1 \cdot (-2) & - & 1 \cdot 3 & = & 3 \checkmark \\
 II. & 2 \cdot 2 & - & 2 \cdot (-2) & - & 4 \cdot 3 & = & -4 \checkmark \\
 III. & 1 \cdot 2 & + & 3 \cdot (-2) & + & 3 \cdot 3 & = & 5 \checkmark
 \end{array}$$

Mit einer Probe lässt sich überprüfen, ob die Ergebnisse richtig sind. Wichtig ist, dass die Werte für die Variablen in alle drei Gleichungen eingesetzt werden.