

Das folgende lineare Gleichungssystem (LGS) mit drei Gleichungen soll gelöst werden. Dabei werden durch geschickte Addition im ersten Schritt zwei Gleichungen mit zwei Variablen und im zweiten Schritt aus diesen beiden Gleichungen eine Gleichung mit einer Variablen erzeugt. Dieses strukturierte Vorgehen wird als **Gaußverfahren** bezeichnet.

$$\begin{array}{l} I. \quad 4x_1 + 1x_2 - 1x_3 = 3 \\ II. \quad 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -4 \\ III. \quad 1x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} I. \quad 4x_1 + 1x_2 - 1x_3 = 3 \quad | \cdot (-1) \\ II. \quad 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -4 \quad | \cdot 2 \\ III. \quad 1x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 5 \quad | \cdot 4 \end{array}$$

Um das Additionsverfahren anwenden zu können, werden die Gleichungen so multipliziert, dass der Koeffizient vor  $x_1$  in allen drei Gleichungen gleich ist. Gleichung I wird dann mit -1 multipliziert, sodass die  $x_1$ -Werte beim Addieren rausfallen.

$$\begin{array}{l} I_a. \quad -4x_1 - 1x_2 + 1x_3 = -3 \\ II_a. \quad 4x_1 - 4x_2 - 8x_3 = -8 \quad | I_a + II_a \\ III_a. \quad 4x_1 + 12x_2 + 12x_3 = 20 \quad | I_a + III_a \end{array}$$

Nun werden die Gleichungen addiert. Die erste Zeile bleibt unverändert stehen.

$$\begin{array}{l} I_b. \quad -4x_1 - 1x_2 + 1x_3 = -3 \\ II_b. \quad -5x_2 - 7x_3 = -11 \quad | \cdot 11 \\ III_b. \quad 11x_2 + 13x_3 = 17 \quad | \cdot 5 \end{array}$$

Das LGS besteht nun aus einer Gleichung mit drei Variablen und zwei Gleichungen mit zwei Variablen. Diese beiden Gleichungen werden multipliziert, sodass es sich bei den Koeffizienten vor  $x_2$  um Zahl und Gegenzahl handelt.

$$\begin{array}{l} I_c. \quad -4x_1 - 1x_2 + 1x_3 = -3 \\ II_c. \quad -55x_2 - 77x_3 = -121 \quad | : 11 \\ III_c. \quad 55x_2 + 65x_3 = 85 \quad | II_c + III_c \end{array}$$

Wenn die Werte wie in diesem Beispiel durch die Multiplikation recht hoch werden, kann anschließend wieder dividiert werden. So kann später mit den kleineren Koeffizienten in der zweiten Zeilen leichter gerechnet werden.

$$\begin{array}{l}
 I_d. \quad -4x_1 \quad - \quad 1x_2 \quad + \quad 1x_3 \quad = \quad -3 \\
 II_d. \quad \quad \quad -5x_2 \quad - \quad 7x_3 \quad = \quad -11 \\
 III_d. \quad \quad \quad \quad \quad -12x_3 \quad = \quad -36
 \end{array}$$

Das LGS besteht nun aus einer Gleichung mit drei Variablen, einer Gleichung mit zwei Variablen und einer Gleichung mit einer Variablen. Diese Darstellung wird als **Stufenform** bezeichnet.

$$\begin{array}{l}
 III_d. \quad \quad \quad -12x_3 \quad = \quad -36 \quad | : (-12) \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad x_3 \quad = \quad 3
 \end{array}$$

Die letzte Gleichung enthält nur eine Variable. Sie wird nach  $x_3$  umgestellt.

$$\begin{array}{l}
 II_d. \quad \quad -5x_2 \quad - \quad 7 \cdot 3 \quad = \quad -11 \\
 \quad \quad \quad -5x_2 \quad - \quad 21 \quad = \quad -11 \quad | + 21 \\
 \quad \quad \quad -5x_2 \quad \quad \quad = \quad 10 \quad | : (-5) \\
 \quad \quad \quad \quad \quad x_2 \quad \quad \quad = \quad -2
 \end{array}$$

Der Wert von  $x_3$  wird in die zweite Gleichung eingesetzt, um  $x_2$  zu erhalten.

$$\begin{array}{l}
 I_d. \quad -4x_1 \quad - \quad 1 \cdot (-2) \quad + \quad 1 \cdot 3 \quad = \quad -3 \\
 \quad \quad -4x_1 \quad \quad \quad + \quad 5 \quad = \quad -3 \quad | - 5 \\
 \quad \quad -4x_1 \quad \quad \quad = \quad -8 \quad | : (-4) \\
 \quad \quad \quad \quad \quad x_1 \quad \quad \quad = \quad 2
 \end{array}$$

Nun fehlt nur noch der Wert für  $x_1$ . Er lässt sich bestimmen, indem  $x_2$  und  $x_3$  in die erste Gleichung eingesetzt werden.

$$L = \{2; -2; 3\}$$

Wenn alle Variablen bekannt sind, wird die Lösungsmenge angegeben.

$$\begin{array}{l}
 I. \quad 4 \cdot 2 \quad + \quad 1 \cdot (-2) \quad - \quad 1 \cdot 3 \quad = \quad 3 \quad \checkmark \\
 II. \quad 2 \cdot 2 \quad - \quad 2 \cdot (-2) \quad - \quad 4 \cdot 3 \quad = \quad -4 \quad \checkmark \\
 III. \quad 1 \cdot 2 \quad + \quad 3 \cdot (-2) \quad + \quad 3 \cdot 3 \quad = \quad 5 \quad \checkmark
 \end{array}$$

Mit einer Probe lässt sich überprüfen, ob die Ergebnisse richtig sind. Wichtig ist, dass die Werte für die Variablen in alle drei Gleichungen eingesetzt werden.