



Mathematik Vektoren 12



Arbeitsauftrag

Erarbeite dir die Regeln zur Durchführung einer Punktprobe in einer Ebene, indem du die fehlenden Angaben im Rechenweg ergänzt. Wenn du nicht weiter kommst, findest du die Lösungen am Ende des Dokuments.

Liegt ein Punkt in der Ebene E ?

Die Ebene E enthält die Punkte A , B und C . Ihre Ebenengleichung lautet:

$$E: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}, \text{ mit } r \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}$$

Beliebige Punkte der Ebene können berechnet werden, indem für die Parameter r und s reelle Zahlen eingesetzt werden. Umgekehrt muss daher gelten: Wenn ein Punkt in der Ebene liegt, gibt es zwei reelle Zahlen r und s , für die die Ebenengleichung zu diesem Punkt führt. Das wird mit einer Punktprobe untersucht.

Beispielaufgabe

Gegeben ist die Ebene E .

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Untersuche, ob die Punkte $P(-4|5|4)$ und $Q(2|3|3)$ in der Ebene E liegen.

Untersuchung von Punkt P

1) Um zu untersuchen, ob der Punkt P in der Ebene liegt, wird der Ortsvektor $\vec{p}$ für $\vec{x}$ eingesetzt:

[illegible]

2) Aus der Vektorgleichung ergibt sich ein LGS:

[illegible]



3) Das LGS enthält drei Gleichungen und zwei Unbekannte. Nutze die ersten beiden Gleichungen, um r und s zu bestimmen:

[illegible]

4) Führe mit der dritten Gleichung die Probe durch:

[illegible]

5) Das LGS hat Lösung. Die Punktprobe ist . Der Punkt P in der Ebene E .

Untersuchung von Punkt Q

Führe die Schritte 1) bis 5) zur Untersuchung von Punkt Q ebenfalls durch. Nutze für die Rechnungen dein Heft.



INPUT: Eine Punktprobe durchführen

Mathematik Vektoren 12

Lösung - Untersuchung von Punkt P

Schritt 1)

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 2)

$$I. \quad -4 = 2 - 2r - 2s$$

$$II. \quad 5 = 4 + 1r + 0s$$

$$III. \quad 4 = -1 + 3r + 1s$$

Schritt 3)

$$I. \quad -4 = 2 - 2r - 2s \quad | -2$$

$$II. \quad 5 = 4 + 1r + 0s \quad | -4$$

$$I_a. \quad -6 = -2r - 2s$$

$$II_a. \quad 1 = 1r$$

$$I_a. \quad -6 = -2 \cdot 1 - 2s \quad | +2$$

$$-4 = -2s \quad | : (-2)$$

$$2 = s$$

$$r = 1; s = 2$$

Schritt 4)

$$III. \quad 4 = -1 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2$$

$$4 = 4 \quad \checkmark$$

Schritt 5)

Das LGS hat genau eine Lösung. Die Punktprobe ist positiv. Der Punkt P liegt in der Ebene E .





INPUT: Eine Punktprobe durchführen

Mathematik Vektoren 12

Lösung - Untersuchung von Punkt Q

Schritt 1)

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 2)

$$I. \quad 2 = 2 - 2r - 2s$$

$$II. \quad 3 = 4 + 1r + 0s$$

$$III. \quad 3 = -1 + 3r + 1s$$

Schritt 3)

$$I. \quad 2 = 2 - 2r - 2s \quad | -2$$

$$II. \quad 3 = 4 + 1r + 0s \quad | -4$$

$$I_a. \quad 0 = -2r - 2s$$

$$II_a. \quad -1 = 1r$$

$$I_a. \quad 0 = -2 \cdot (-1) - 2s \quad | -2$$

$$-2 = -2s \quad | : (-2)$$

$$1 = s$$

$$r = -1; s = 1$$

Schritt 4)

$$III. \quad 3 = -1 + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 1$$

$$3 \neq -3$$

Schritt 5)

Das LGS hat keine Lösung. Die Punktprobe ist negativ. Der Punkt Q liegt nicht in der Ebene E .

