



AB: Extrempunkte berechnen

Mathematik Funktionen 11

Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^4 + 2x^3 - 1$.

a) Bestimme die Extrempunkte der Funktion $f(x)$.

b) Gib ohne weitere Rechnung die Anzahl der Nullstellen von $f(x)$ an und begründe deine Vorhersage.



Hinweis 1 (Teilaufgabe a)

Um die Extrempunkte einer Funktion zu bestimmen, muss die Funktion abgeleitet werden.



Hinweis 2 (Teilaufgabe a)

Die notwendige Bedingung für einen Extrempunkt ist, dass die erste Ableitung null ist.



Hinweis 3 (Teilaufgabe a)

Die hinreichende Bedingung für einen Extrempunkt ist, dass die zweite Ableitung an der Stelle nicht null ist. Wenn sie null ist, könnte ein Sattelpunkt vorliegen.



Hinweis 4 (Teilaufgabe a)

Die y -Werte eines Punktes lassen sich bestimmen, indem die x -Werte in die Funktion eingesetzt werden.



Hinweis 5 (Teilaufgabe b)

Eine Nullstelle ist ein x -Wert, dessen zugehöriger Funktionswert null ist. An einer Nullstelle wird die x -Achse geschnitten oder berührt.



Hinweis 6 (Teilaufgabe b)

Die maximale Anzahl an Nullstellen entspricht dem Grad einer Funktion.



Hinweis 7 (Teilaufgabe b)

Mithilfe des Vorzeichens vor dem x^4 lässt sich vorhersagen, ob die Funktion nach unten oder oben geöffnet ist.



Hinweis 8 (Teilaufgabe b)

Wenn die y -Werte der Extrempunkte im positiven Bereich liegen, muss die x -Achse geschnitten werden, wenn die Funktion nach unten geöffnet ist.



Lösung

a) Für die Bestimmung der Extremstellen werden die erste und die zweite Ableitung der Funktion gebildet.

$$f(x) = -x^4 + 2x^3 - 1$$

$$f'(x) = -4x^3 + 6x^2$$

$$f''(x) = -12x^2 + 12x$$

Die notwendige Bedingung für einen Extremwert ist, dass die erste Ableitung null ist:

$$f'(x) = 0$$

Daraus ergibt sich die folgende Gleichung:

$$-4x^3 + 6x^2 = 0$$

Die Gleichung wird gelöst. Dazu wird zuerst x^2 ausgeklammert:

$$x^2(-4x + 6) = 0$$

Der Nullproduktsatz führt zu zwei Gleichungen, die nach x aufgelöst werden:

$$x^2 = 0 \text{ und } -4x + 6 = 0$$

$$x_1 = 0 \text{ und } x_2 = \frac{3}{2}$$

Um zu prüfen, welche Art von Extrempunkt vorliegt, wird die hinreichende Bedingung für einen Extrempunkt untersucht. Die berechneten x -Werte werden dafür in die zweite Ableitung eingesetzt:

$$f''(x_1) = f''(0) = -12 \cdot 0^2 + 12 \cdot 0 = 0$$

Da die zweite Ableitung an der Stelle x_1 null ist, könnte es sich um einen Sattelpunkt handeln. Um das zu untersuchen, wird die dritte Ableitung bestimmt:

$$f'''(x) = -24x + 12$$

x_1 wird in die dritte Ableitung eingesetzt:

$$f'''(x_1) = f'''(0) = -24 \cdot 0 + 12 = -12 \neq 0$$

Da die dritte Ableitung ungleich null ist, handelt es sich um einen Sattelpunkt.

Nun wird noch die hinreichende Bedingung für x_2 geprüft:

$$f''(x_2) = f''\left(\frac{3}{2}\right) = -12 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 12 \cdot \frac{3}{2} = -9 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt}$$

Für x_2 ist die hinreichende Bedingung erfüllt. Da die zweite Ableitung an der Stelle x_2 kleiner als null ist, handelt es sich um einen Hochpunkt. Im letzten Schritt werden nun noch die y -Werte für den Sattelpunkt bestimmt. Dazu werden x_1 und x_2 in die Ursprungsfunktion eingesetzt:

$$f(x_1) = f(0) = -0^4 + 2 \cdot 0^3 - 1 = -1$$

$$f(x_2) = f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{3^4}{2} + 2 \cdot \frac{3^3}{2} - 1 = \frac{11}{16}$$

Nun liegen alle Werte vor, sodass die Koordinaten des Sattelpunktes und des Hochpunktes angegeben werden können:

$$S(0|-1), H\left(\frac{3}{2} \mid \frac{11}{16}\right)$$

b) Eine Funktion vierten Grades hat maximal vier Nullstellen. Der Sattelpunkt hat die Koordinaten $S(0|-1)$, er liegt also unterhalb der x -Achse. Da es für x -Werte, die kleiner sind als null, keine weiteren Extrempunkte gibt und die Funktion nach unten geöffnet ist, gibt es keine Nullstelle im negativen Bereich. Der Hochpunkt liegt bei $H\left(\frac{3}{2} \mid \frac{11}{16}\right)$ und liegt somit oberhalb der x -Achse. Um den Hochpunkt zu erreichen, muss die Funktion die x -Achse einmal davor und einmal dahinter schneiden. Da es keine weiteren Extrempunkte gibt, bleibt es bei den beiden Nullstellen.

Mit einer Zeichnung der Funktion lässt sich die Vorhersage bestätigen:

