AB: Extrempunkte berechnen

Mathematik Funktionen 11

Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^4 + 2x^3 - 1$.
a) Bestimme die Extrempunkte der Funktion $f(x)$.
b) Gib ohne weitere Rechnung die Anzahl der Nullstellen von $f(x)$ an und begründe deine Vorhersage.

Hinweis 1 (Teilaufgabe a)
Um die Extrempunkte einer Funktion zu bestimmen, muss die Funktion abgeleitet werden.

Hinweis 2 (Teilaufgabe a)
Die notwendige Bedingung für einen Extrempunkt ist, dass die erste Ableitung null ist.

Hinweis 3 (Teilaufgabe a)
Die hinreichende Bedingung für einen Extrempunkt ist, dass die zweite Ableitung an der Stelle nicht null ist. Wenn sie null ist, könnte ein Sattelpunkt vorliegen.

Hinweis 4 (Teilaufgabe a)
Die y-Werte eines Punktes lassen sich bestimmen, indem die x-Werte in die Funktion eingesetzt werden.

Hinweis 5 (Teilaufgabe b)
Eine Nullstelle ist ein x-Wert, dessen zugehöriger Funktionswert null ist. An einer Nullstelle wird die x-Achse geschnitten oder berührt.

Hinweis 6 (Teilaufgabe b)
Die maximale Anzahl an Nullstellen entspricht dem Grad einer Funktion.

Hinweis 7 (Teilaufgabe b)
Mithilfe des Vorzeichens vor dem x^4 lässt sich vorhersagen, ob die Funktion nach unten oder oben geöffnet ist.

Hinweis 8 (Teilaufgabe b)
Wenn die y-Werte der Extrempunkte im positiven Bereich liegen, muss die x-Achse geschnitten werden, wenn die Funktion nach unten geöffnet ist.

Lösung

a) Für die Bestimmung der Extremstellen werden die erste und die zweite Ableitung der Funktion gebildet.

$$f(x) = -x^4 + 2x^3 - 1$$
$$f'(x) = -4x^3 + 6x^2$$
$$f''(x) = -12x^2 + 12x$$

Die notwendige Bedingung für einen Extremwert ist, dass die erste Ableitung null ist:

$$f'(x) = 0$$

Daraus ergibt sich die folgende Gleichung:

$$-4x^3 + 6x^2 = 0$$

Die Gleichung wird gelöst. Dazu wird zuerst x^2 ausgeklammert:

$$x^2(-4x + 6) = 0$$

Der Nullproduktsatz führt zu zwei Gleichungen, die nach x aufgelöst werden:

$$x^2 = 0 \text{ und } -4x + 6 = 0$$
$$x_1 = 0 \text{ und } x_2 = \frac{3}{2}$$

Um zu prüfen, welche Art von Extrempunkt vorliegt, wird die hinreichende Bedingung für einen Extrempunkt untersucht. Die berechneten x-Werte werden dafür in die zweite Ableitung eingesetzt:

$$f''(x_1) = f''(0) = -12 \cdot 0^2 + 12 \cdot 0 = 0$$

Da die zweite Ableitung an der Stelle x_1 null ist, könnte es sich um einen Sattelpunkt handeln. Um das zu untersuchen, wird die dritte Ableitung bestimmt:

$$f'''(x) = -24x + 12$$

x_1 wird in die dritte Ableitung eingesetzt:

$$f'''(x_1) = f'''(0) = -24 \cdot 0 + 12 = -12 \neq 0$$

Da die dritte Ableitung ungleich null ist, handelt es sich um einen Sattelpunkt.

Nun wird noch die hinreichende Bedingung für x_2 geprüft:

$$f''(x_2) = f''(\tfrac{3}{2}) = \text{-}12 \cdot (\tfrac{3}{2})^2 + 12 \cdot \tfrac{3}{2} = \text{-}9 < 0 \quad \Rightarrow \text{Hochpunkt}$$

Für x_2 ist die hinreichende Bedingung erfüllt. Da die zweite Ableitung an der Stelle x_2 kleiner als null ist, handelt es sich um einen Hochpunkt. Im letzten Schritt werden nun noch die y-Werte für den Sattelpunkt bestimmt. Dazu werden x_1 und x_2 in die Ursprungsfunktion eingesetzt:

$$f(x_1) = f(0) = \text{-}0^4 + 2 \cdot 0^3 - 1 = \text{-}1$$

$$f(x_2) = f(\tfrac{3}{2}) = \text{-}\tfrac{3}{2}^4 + 2 \cdot \tfrac{3}{2}^3 - 1 = \tfrac{11}{16}$$

Nun liegen alle Werte vor, sodass die Koordinaten des Sattelpunktes und des Hochpunktes angegeben werden können:

$$S(0|\text{-}1), H(\tfrac{3}{2}|\tfrac{11}{16})$$

b) Eine Funktion vierten Grades hat maximal vier Nullstellen. Der Sattelpunkt hat die Koordinaten $S(0|\text{-}1)$, er liegt also unterhalb der x-Achse. Da es für x-Werte, die kleiner sind als null, keine weiteren Extrempunkte gibt und die Funktion nach unten geöffnet ist, gibt es keine Nullstelle im negativen Bereich. Der Hochpunkt liegt bei $H(\frac{3}{2}|\frac{11}{16})$ und liegt somit oberhalb der x-Achse. Um den Hochpunkt zu erreichen, muss die Funktion die x-Achse einmal davor und einmal dahinter schneiden. Da es keine weiteren Extrempunkte gibt, bleibt es bei den beiden Nullstellen.

Mit einer Zeichnung der Funktion lässt sich die Vorhersage bestätigen: