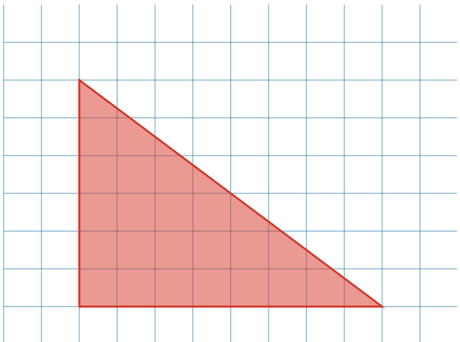
INFO: Flächeninhalt eines Dreiecks

Mathematik Messen E 5

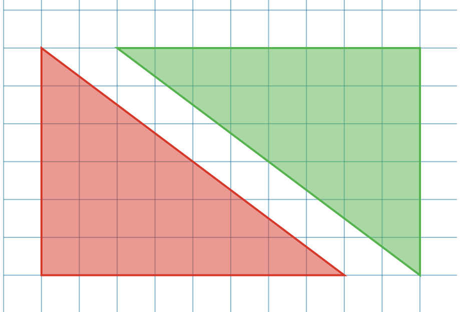
Erinnerst du dich noch daran, wie man den **Flächeninhalt eines Rechtecks** berechnet?
Ganz genau! Man multipliziert die zwei Seiten des Rechtecks miteinander und kann deshalb daraus folgende Formel ableiten:

$$A_{Rechteck} = a \cdot b$$

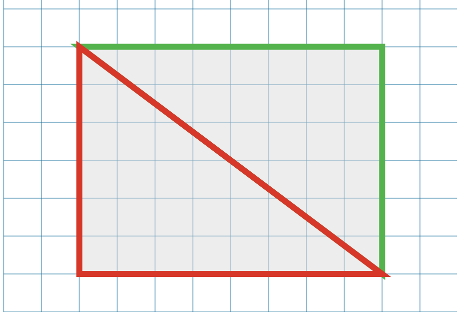
Aber wie geht das bei einem Dreieck?



Um die Fläche des roten Dreiecks berechnen zu können, wendet man einen kleinen Trick an: man erweitert es zu einem Rechteck!

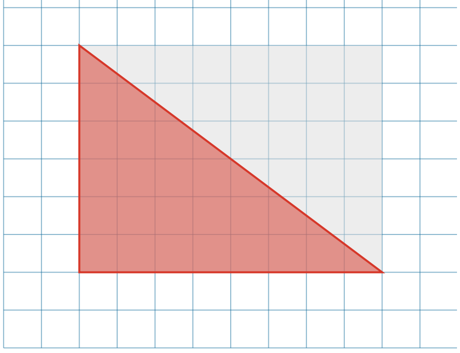


Hierzu verdoppelt man das Dreieck (Dreieck → Dreieck) und dreht es so, dass ...



... aus den zwei Dreiecken ein Rechteck entsteht. Da wir die Formel zur Berechnung des Flächeninhaltes eines Rechtecks ($A_{\square}$) bereits kennen, können wir für das gesamte Rechteck nun rechnen:

$$\begin{aligned} A_{\square} &= a \cdot b \\ &= 4cm \cdot 3cm \\ &= \underline{\underline{\mathbf{12cm^2}}} \end{aligned}$$



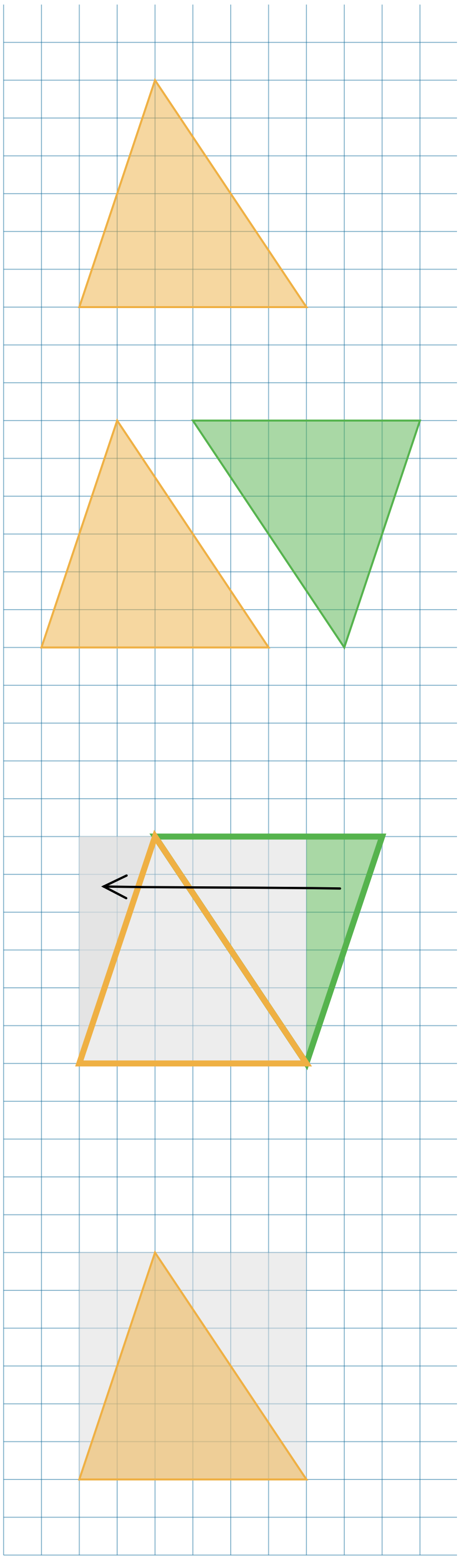
Der Flächeninhalt des roten Dreiecks ist aber nur halb so groß wie der des Rechtecks. Also muss man das Ergebnis von $A_{\square}$ nun noch durch 2 teilen:

$$\begin{aligned} A_{\triangle} &= A_{\square} : 2 \\ &= 12cm^2 : 2 \\ &= \underline{\underline{\mathbf{6cm^2}}} \end{aligned}$$

INFO: Flächeninhalt eines Dreiecks

Mathematik Messen E 5

Da das rote Dreieck auf der letzten Seite ein rechtwinkliges Dreieck war, konnte man es ganz leicht durch Verdopplung zu einem Rechteck erweitern. Aber wie geht das, wenn das Dreieck nicht rechtwinklig ist?
Das schauen wir uns jetzt an!



Um die Fläche des gelben Dreiecks berechnen zu können, wendet man wieder folgenden Trick an: man erweitert es zu einem Rechteck!

Hierzu verdoppelt man das Dreieck und dreht es so, dass aus den zwei Dreiecken ein Rechteck wird.

Aber Moment mal! Das ergibt ja gar kein Rechteck, sondern ein Parallelogramm! Und rechts guckt ja ein Teil des grünen Dreiecks aus dem Rechteck heraus!
Die Lösung ist ganz einfach: wenn du den grünen Teil abschneidest und an die linke Seite „klebst“, ergibt das wieder ein perfektes Rechteck!
Und wir können rechnen:

$$\begin{aligned} A_{\square} &= a \cdot b \\ &= 3cm \cdot 3cm \\ &= \underline{\underline{\mathbf{9cm^2}}} \end{aligned}$$

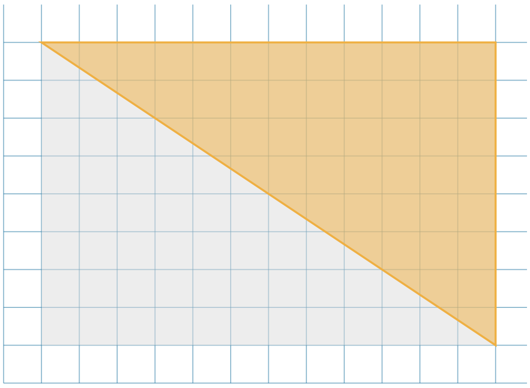
Und weil auch hier genau zwei gleich große Dreiecke in das Rechteck gepasst haben, müssen wir das Ergebnis von $A_{\square}$ nun noch durch 2 teilen:

$$\begin{aligned} A_{\triangle} &= A_{\square} : 2 \\ &= 9cm^2 : 2 \\ &= \underline{\underline{\mathbf{4{,}5cm^2}}} \end{aligned}$$

INFO: Flächeninhalt eines Dreiecks

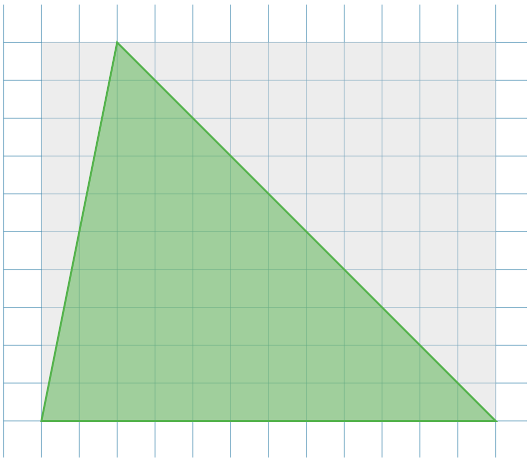
Mathematik Messen E 5

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist also immer halb so groß wie das Rechteck, welches das Dreieck "umrahmt". Hier siehst du drei Beispiele:



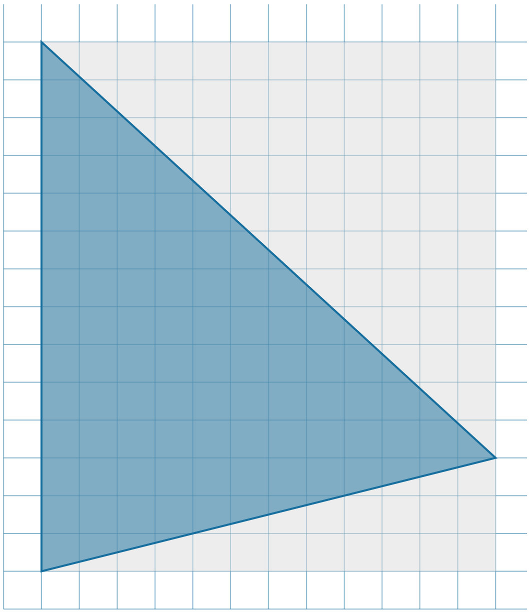
$$\begin{aligned} A_{\square} &= a \cdot b \\ &= 6cm \cdot 4cm \\ &= \underline{\underline{\mathbf{24cm^2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{\triangle} &= A_{\square} : 2 \\ &= 24cm^2 : 2 \\ &= \underline{\underline{\mathbf{12cm^2}}} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} A_{\square} &= a \cdot b \\ &= 6cm \cdot 5cm \\ &= \underline{\underline{\mathbf{30cm^2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{\triangle} &= A_{\square} : 2 \\ &= 30cm^2 : 2 \\ &= \underline{\underline{\mathbf{15cm^2}}} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} A_{\square} &= a \cdot b \\ &= 7cm \cdot 6cm \\ &= \underline{\underline{\mathbf{42cm^2}}} \end{aligned}$$

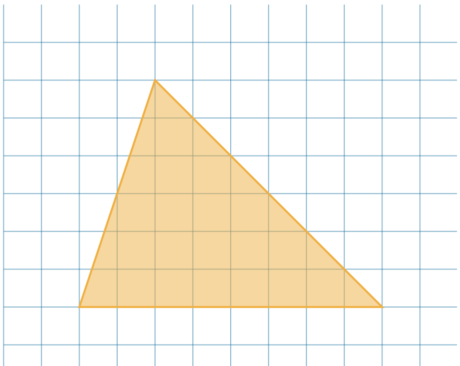
$$\begin{aligned} A_{\triangle} &= A_{\square} : 2 \\ &= 42cm^2 : 2 \\ &= \underline{\underline{\mathbf{21cm^2}}} \end{aligned}$$

INFO: Flächeninhalt eines Dreiecks

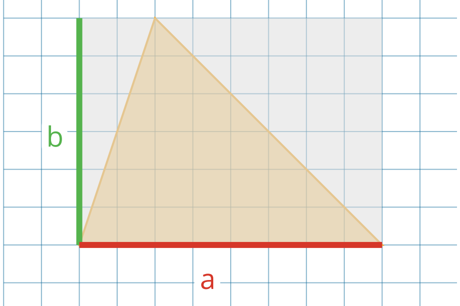
Mathematik Messen E 5

Geht das auch ohne „umrahmendes“ Rechteck?

Du hast Recht! Das mit dem „umrahmenden“ Rechteck ist ziemlich aufwendig - und natürlich gibt es einen kürzeren Weg. Hierzu sehen wir uns nochmals ein Dreieck an:

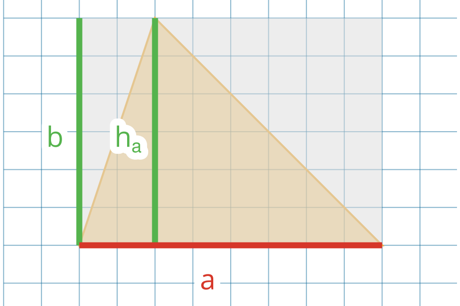


Nehmen wir als Beispiel dieses Dreieck.



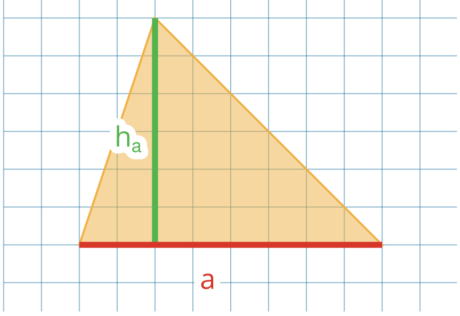
Würde man ein „umrahmendes“ Rechteck um das Dreieck zeichnen, dann hätte dieses Rechteck die Seitenlängen:

$a = 4cm$ und $b = 3cm$



Dabei fällt auf, dass die $Seite\ b$ genauso lang ist wie die Höhe der $Seite\ a$ (h_a).
Man könnte den Flächeninhalt des „umrahmenden“ Dreiecks also auch wie folgt berechnen:

$$A_\triangle = a \cdot h_a$$



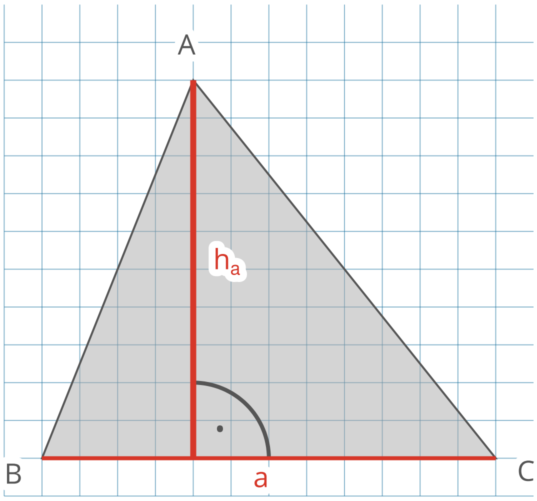
Und da - wie weiter oben bereits erklärt - der Flächeninhalt des Dreiecks nur halb so groß wie der des „umrahmenden“ Rechtecks ist, kann man also auch rechnen:

$$A_\triangle = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

Was ist die „Höhe von a“ (h_a)?

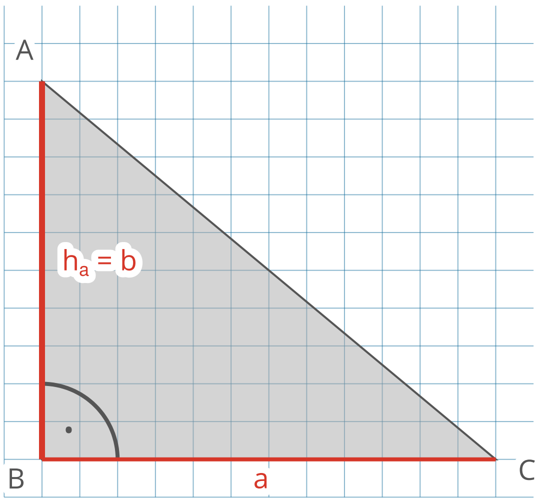
Als „Höhe von a“ (h_a) bezeichnet man die Strecke, die senkrecht (also im rechten Winkel) auf der Seite a steht und im gegenüberliegenden Eck endet.

Sehen wir uns das mal an einem Beispiel an:



Natürlich kann man auch die Höhe der anderen zwei Seiten eines Dreiecks zeichnen. Die Höhen werden dann nach der Seite benannt, auf der sie im rechten Winkel stehen - also h_b oder h_c.

Bei einem rechtwinkligen Dreieck ist die Höhe der Seite a identisch mit der Seite b:



INFO: Flächeninhalt eines Dreiecks

Mathematik Messen E 5

Formel

Möchte man den Flächeninhalt eines Dreiecks berechnen, so braucht man also folgende Maße:

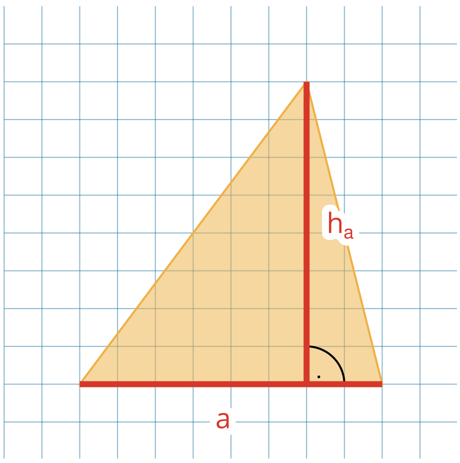
1. Die Länge der Seite a, b, oder c
2. Die Länge der entsprechenden Höhe h_a, h_b, oder h_c.

Vereinfacht ergibt sich daraus ...

Die Formel zur Flächenberechnung eines Dreiecks

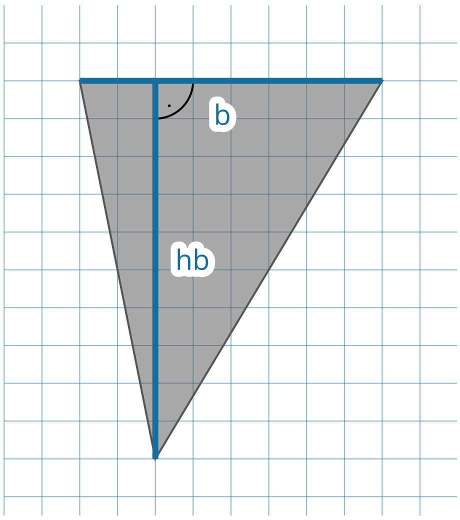
$$A_\triangle = \frac{a \cdot h_a}{2} \qquad oder \qquad A_\triangle = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$$

Beispiele



$$\begin{aligned} A_\triangle &= \frac{a \cdot h_a}{2} \\ &= \frac{4cm \cdot 4cm}{2} \\ &= \frac{16cm^2}{2} \\ &= \underline{\underline{\mathbf{8cm^2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_\triangle &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4cm \cdot 4cm \\ &= \frac{1}{2} \cdot 16cm^2 \\ &= \underline{\underline{\mathbf{8cm^2}}} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} A_\triangle &= \frac{b \cdot h_b}{2} \\ &= \frac{4cm \cdot 5cm}{2} \\ &= \frac{20cm^2}{2} \\ &= \underline{\underline{\mathbf{10cm^2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_\triangle &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4cm \cdot 5cm \\ &= \frac{1}{2} \cdot 20cm^2 \\ &= \underline{\underline{\mathbf{10cm^2}}} \end{aligned}$$