AB: Funktion mit Sattelpunkt

Mathematik Funktionen 11

Über die Funktion $f(x)$ ist bekannt, dass sie den Sattelpunkt $S(x_1|0)$ mit $x_1 \neq 0$ hat. Für eine zweite Funktion gilt $g(x) = f(x) \cdot x$. Zeige, dass die Funktion $g(x)$ an der Stelle x_1 ebenfalls einen Sattelpunkt hat.

Hinweis 1

Aus den Koordinaten des Sattelpunkts folgt: $f(x_1) = 0$.

Hinweis 2

An einem Sattelpunkt ist die erste Ableitung null.

Hinweis 3

Die zweite Ableitung ist an einem Sattelpunkt ebenfalls null.

Hinweis 4

Die dritte Ableitung ist an einem Sattelpunkt hingegen ungleich null.

Hinweis 5

Die Funktion $g(x)$ lässt sich mithilfe der Produktregel ableiten.

Hinweis 6

Die erste Ableitung von $g(x)$ ist $g'(x) = f'(x) \cdot x + f(x)$.

Lösung

Aus der Angabe, dass der Punkt $S(x_1|0)$ ein Sattelpunkt ist, folgt:

$$f(x_1) = 0$$
$$f'(x_1) = 0$$
$$f''(x_1) = 0$$
$$f'''(x_1) \neq 0$$

Um zu überprüfen, ob bei $g(x)$ einen Sattelpunkt vorliegt, werden die Ableitungen der Funktion mithilfe der Produktregel bestimmt:

$$g'(x) = f'(x) \cdot x \ + \ f(x)$$
$$g''(x) = f''(x) \cdot x \ + \ f'(x) + f'(x) = f''(x) \cdot x \ + \ 2 \cdot f'(x)$$
$$g'''(x) = f'''(x) \cdot x \ + \ f''(x) + 2 \cdot f''(x) = f'''(x) \cdot x \ + \ 3 \cdot f'(x)$$

Der x-Wert x_1 wird in die Ableitungen eingesetzt:

$$g'(x_1) = f'(x_1) \cdot x_1 \ + \ f(x_1)$$
$$g''(x_1) = f''(x_1) \cdot x_1 \ + \ 2 \cdot f'(x_1)$$
$$g'''(x_1) = f'''(x_1) \cdot x_1 \ + \ 3 \cdot f'(x_1)$$

In den Ableitungen werden die Werte von oben (also immer null) eingesetzt:

$$g'(x_1) = 0 \cdot x_1 \ + \ 0$$
$$g''(x_1) = 0 \cdot x_1 \ + \ 2 \cdot 0$$
$$g'''(x_1) = f'''(x_1) \cdot x_1 \ + \ 3 \cdot 0$$

Aus der Zusammenfassung folgt, dass die erste und die zweite Ableitung jeweils null sind. Bei der dritten Ableitung bleibt das Produkt $f'''(x_1) \cdot x_1$ stehen. Da bekannt ist, dass beide Faktoren ungleich null sind, muss auch das Produkt ungleich null sein.

$$g'(x_1) = 0$$
$$g''(x_1) = 0$$
$$g'''(x_1) = f'''(x_1) \cdot x_1 \neq 0$$

Somit sind alle Bedingungen für einen Sattelpunkt der Funktion $g(x)$ an der Stelle x_1 erfüllt.