# INFO: Funktionsrekonstruktion

Mathematik Gleichungen

Anhand von einigen wenigen Angaben lässt sich die Funktionsgleichung einer Funktion rekonstruieren.

Dabei lässt sich schrittweise vorgehen:
1. Bedingungen aus der Aufgabe herauslesen
2. Grad der Funktion bestimmen, allgemeine Funktionsgleichung aufstellen, bei Bedarf Ableitungen bilden
3. Prüfen, ob ausreichend Bedingungen bekannt sind: Es muss mindestens so viele Bedingungen wie Variablen in der allgemeinen Funktionsgleichung geben.
4. Bedingungen in die allgemeine Funktionsgleichung einsetzen, um ein LGS aufzustellen
5. LGS lösen
6. Funktionsgleichung aufstellen

Anhand der folgenden Aufgabe soll das Vorgehen exemplarisch gezeigt werden.

*Über eine Parabel ist bekannt, dass sie durch den Punkt P (-3|7) geht, an der Stelle -1 einen Extrempunkt hat und die y-Achse bei 1 schneidet. Wie lautet die Funktionsgleichung der Parabel?*

<u>Schritt 1:</u>
Aus den Angaben ergeben sich drei Bedingungen:
I. f (-3) = 7
II. f'(-1) = 0
III. f(0) = 1

<u>Schritt 2:</u>
Eine Parabel ist eine Funktion zweiten Grades. Ihre Funktionsgleichung und Ableitung lauten:
$f(x) = ax^2 + bx + c$
$f'(x) = 2ax + b$

<u>Schritt 3:</u>
Es gibt drei Variablen (a, b und c) und ebenso viele Bedingungen.

<u>Schritt 4:</u>
Die Bedingungen werden in die Funktionsgleichung eingesetzt. Es entsteht ein LGS, das sich noch etwas vereinfachen lässt:

$$\begin{array}{rlllll} I. & a\cdot(\text{-}3)^2 & + & b\cdot(\text{-}3) & + c & = & 7 \\ II. & 2\cdot a\cdot(\text{-}1) & + & b & & = & 0 \\ III. & a\cdot 0^2 & + & b\cdot 0 & + c & = & 1 \end{array}$$

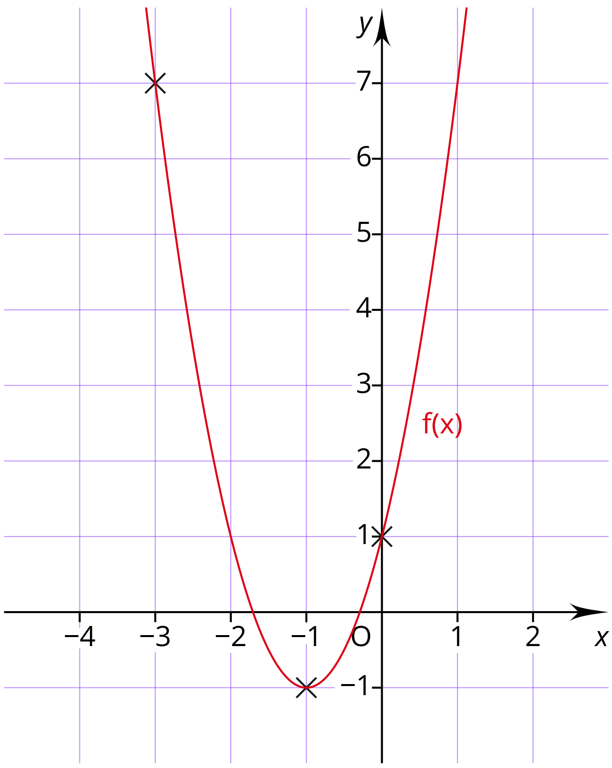
$$\begin{array}{rlllll} I. & 9a & - & 3b & + c & = & 7 \\ II. & \text{-}2a & + & b & & = & 0 \\ III. & & & & c & = & 1 \end{array}$$

<u>Schritt 5:</u>
Das LGS wird nach den Regeln zum Lösen eines LGS gelöst. Die Regeln können auf den entsprechenden Infoseiten dieses Materialpakets nachgelesen werden, sodass hier nur die Lösung, aber nicht der Weg gezeigt wird.

$$L = \{2; 4; 1\}$$

<u>Schritt 6:</u>
Damit sind die Koeffizienten bekannt: a = 2, b = 4, c = 1. Sie werden in die allgemeine Funktionsgleichung eingesetzt:
$f(x) = 2x^2 + 4x + 1$

Die Funktion kann abschließend gezeichnet werden, um zu prüfen, ob die drei Bedingungen erfüllt wurden.



**Bedingungen erkennen**

Eine Schwierigkeit bei der Rekonstruktion von Funktionen ist es, die Bedingungen aus dem Aufgabentext herauszulesen. In der Tabelle sind einige Beispiele für Angaben und die Bedingungen, die sich aus ihnen ergeben.

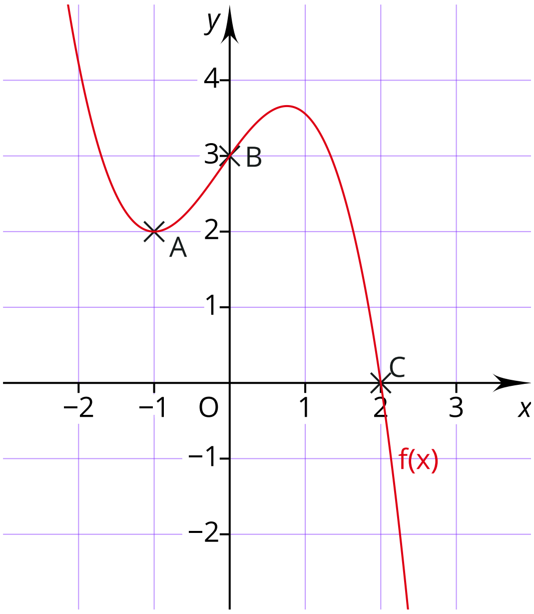
| **Angabe in der Aufgabe**<br>Die Funktion ... | **Bedingung(en)** |
|---|---|
| ... geht durch den Punkt P (1\|2). | f(1) = 2 |
| ... geht durch den Ursprung. | f(0) = 0 |
| ... hat eine Nullstelle bei x = 2. | f(2) = 0 |
| ... schneidet die y-Achse bei 3. | f(0) = 3 |
| ... hat den Hochpunkt H (4\|2). | f (4) = 2<br>f'(4) = 0 |
| ... hat bei x = 4 eine Extremstelle. | f'(4) = 0 |
| ... hat den Wendepunkt W (3\|5). | f(3) = 5<br>f''(3) = 0 |
| ... hat bei S (2\|1) einen Sattelpunkt. | f(2) = 1<br>f'(2) = 0<br>f''(2) = 0 |
| ... hat bei x = 2 die Steigung 3. | f'(2) = 3 |
| ... hat eine Wendetangente bei x = 4 mit der Steigung 1. | f''(4) = 0<br>f'(4) = 1 |
| ... berührt die x-Achse bei x = 1. | f(1) = 0<br>f'(1) = 0 |
| ... ist achsensymmetrisch. | Alle Koeffizienten vor x-Werten mit ungeraden Exponenten sind null. Die Bedingungen hängen vom Grad der Funktion ab. |
| ... ist punktsymmetrisch. | Alle Koeffizienten vor x-Werten mit geraden Exponenten sind null. Die Bedingungen hängen vom Grad der Funktion ab. |

**Was ist der Unterschied zwischen Punkt und Stelle?**

Ein Punkt besteht immer aus einem x- und einem y-Wert, hat also zwei Koordinaten. Eine Stelle enthält nur die Angabe zum x-Wert.

**Angaben aus einer Abbildung herauslesen**

Nicht immer ist bei einer Rekonstruktionsaufgabe ein Aufgabentext gegeben. Manchmal wird auch der Graph der Funktion gezeigt. Dann können beliebige Punkte als Bedingungen vom Graphen abgelesen werden, um das LGS aufzustellen. Wie viele Bedingungen notwendig sind, hängt vom Grad der Funktion ab.




Bei diesem Graphen lassen sich zum Beispiel die Punkte A (-1|2), B (0|3) und C (2|0) sehr gut ablesen. Beim Aufstellen der Gleichungen kann darüber hinaus genutzt werden, dass es sich beim Punkt A um einen Extrempunkt handelt. Die Bedingungen lauten daher:

I. f(-1) = 2
II. f(0) = 3
III. f(2) = 0
IV. f'(-1) = 0

**Der Grad einer Funktion**

Um eine Funktion rekonstruieren zu können, muss ihr Grad bekannt sein.

| Grad der Funktion | Allgemeine Funktionsgleichung |
|---|---|
| Lineare Funktion | f(x) = ax + b<br>(in manchen Büchern auch f(x) = mx + b<br>oder f(x) = mx + c) |
| Quadratische Funktion<br>Parabel<br>Funktion zweiten Grades | $f(x) = ax^2 + bx + c$ |
| Funktion dritten Grades | $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ |
| Funktion vierten Grades | $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ |
| Funktion fünften Grades | $f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ |

**Was ist eine Normale?**

Eine Normale ist eine lineare Funktion, die die Tangente einer Funktion senkrecht schneidet. Für die Steigung der Tangente $a_T$ und die Steigung der Normalen $a_N$ gilt: $a_T \cdot a_N = -1$