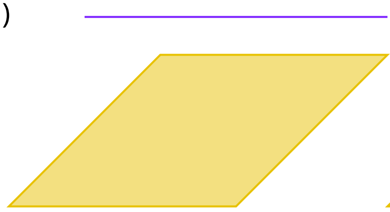
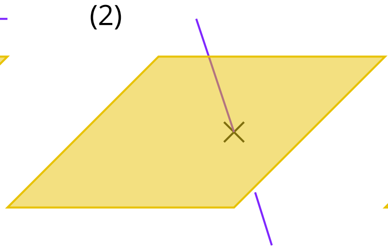
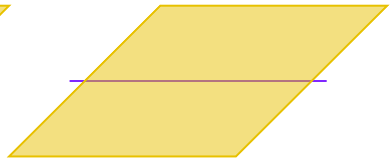
INPUT: Geraden und Ebenen

Mathematik Vektoren 12

Arbeitsauftrag

Erarbeite dir die Rechenregeln zu Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen, indem du die Aufgaben löst. Wenn du nicht weiter kommst, findest du die Lösung am Ende des Dokuments.

① Ebenen und Geraden können unterschiedlich zueinander liegen. Die Abbildungen zeigen die drei verschiedenen Möglichkeiten.

(1)  (2)  (3) 

a) Beschreibe, wie die Geraden zu den Ebenen liegen.

b) Gib an, wie viele gemeinsame Punkte die Gerade und die Ebene in den drei Fällen miteinander haben.

② Welcher der drei Fälle vorliegt, lässt sich rechnerisch ermitteln. Die Beispielaufgabe zeigt die drei Möglichkeiten. Erläutere das Vorgehen.

Beispielaufgabe

Gegeben ist die Ebene E sowie die Geraden g, h und k.

$$E: 4x_1 + 2x_2 - 1x_3 = -4$$

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$h: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$k: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Untersuche, wie die Geraden g, h und k zur Ebene E liegen.

Untersuchung der Geraden g

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 0r \\ 1 + 1r \\ 1 + 2r \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 2 + 0r,\ x_2 = 1 + 1r,\ x_3 = 1 + 2r$$

$$E: 4x_1 + 2x_2 - 1x_3 = -4$$

$$4 \cdot (2 + 0r) + 2 \cdot (1 + 1r) - 1 \cdot (1 + 2r) = -4$$
$$8 + 2 + 2r - 1 - 2r = -4$$
$$9 \neq -4$$

$\Rightarrow$ Die Ebene E und die Gerade g sind parallel.

Untersuchung der Geraden h

$$h\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1s \\ 3+2s \\ 0-1s \end{pmatrix}$$

$x_1 = 2 + 1s$, $x_2 = 3 + 2s$, $x_3 = 0 - 1s$

$E\colon 4x_1 + 2x_2 - 1x_3 = -4$

$4 \cdot (2+1s) + 2 \cdot (3+2s) - 1 \cdot (0-1s) = -4$
$8 + 4s + 6 + 4s + 1s = -4$
$14 + 9s = -4$
$9s = -18$
$s = -2$

$\Rightarrow$ Die Ebene E und die Gerade h haben einen gemeinsamen Schnittpunkt.

Bestimmung des Schnittpunkts S

$$\overrightarrow{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$S(0|-1|2)$

Untersuchung der Geraden k

$$k\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 1t \\ -1 + 2t \\ 6 + 8t \end{pmatrix}$$

$x_1 = 1 + 1t$, $x_2 = -1 + 2t$, $x_3 = 6 + 8t$

$E\colon 4x_1 + 2x_2 - 1x_3 = -4$

$$4 \cdot (1 + 1t) + 2 \cdot (-1 + 2t) - 1 \cdot (6 + 8t) = -4$$
$$4 + 4t - 2 + 4t - 6 - 8t = -4$$
$$-4 = -4 \checkmark$$

$\Rightarrow$ Die Gerade k liegt in der Ebene E.

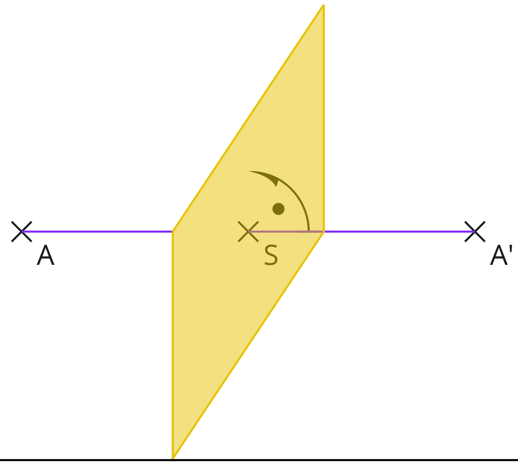
Lässt sich die Lagebeziehung auch mit einer Parametergleichung untersuchen?
Im gezeigten Beispiel wurden die Koordinaten der Geradengleichungen in die Koordinatenform der Ebene eingesetzt. Ist die Ebene hingegen als Parametergleichung gegeben, ist es auch möglich, die Ebene und die Gerade gleichzusetzen. Dabei entsteht ein LGS mit drei Gleichungen und drei Unbekannten.

$$E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rlllll} I. & 1 & + 1r & + 4s & = 1 & + 2t \\ II. & 2 & + 3r & + 2s & = -2 & + 2t \\ III. & 3 & + 5r & - 1s & = 3 & + 3t \end{array}$$

Durch Lösen des LGS lässt sich mithilfe der Lösungsmenge ebenfalls bestimmen, wie die Gerade und die Ebene zueinander liegen. Dieses Vorgehen ist jedoch in der Regel aufwendiger.

Einen Punkt an einer Ebene spiegeln
Mithilfe von Geraden lassen sich Punkte an einer Ebene spiegeln.



③ In der Beispielaufgabe wird gezeigt, wie ein Punkt an einer Ebene gespiegelt werden kann. Erläutere das Vorgehen.

Beispielaufgabe
Gegeben ist die Ebene $E\colon 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 6$

Spiegele den Punkt $A(7|8|-1)$ an der Ebene E.

Spiegelung des Punktes A

(1) $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

(2) $2 \cdot (7 + 2s) + 3 \cdot (8 + 3s) - 2 \cdot (-1 - 2s) = 6$
$\Rightarrow s = -2$

$\vec{s} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$S(3|2|3)$

$\vec{a'} = \vec{a} + 2 \cdot \overrightarrow{AS}$

(3) $= \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$

$A'(-1|-4|7)$

Lösung

Aufgabe 1

a) (1) Die Gerade und die Ebene sind parallel zueinander.
(2) Die Gerade schneidet die Ebene.
(3) Die Gerade liegt in der Ebene.

b) (1) Die Gerade und die Ebene haben keine gemeinsamen Punkte.
(2) Die Gerade und die Ebene haben genau einen gemeinsamen Schnittpunkt.
(3) Alle Punkte, die auf der Geraden liegen, liegen auch in der Ebene. Es gibt unendlich viele gemeinsame Punkte.

Aufgabe 2

Um zu untersuchen, wie die Geraden zu der Ebene E liegen, werden die Koordinaten x_1, x_2 und x_3 in die Koordinatengleichung der Ebene E eingesetzt. Daraus ergibt sich eine Gleichung. Die Gleichung wird jeweils nach dem Parameter aufgelöst. Wenn es einen Schnittpunkt gibt, muss die Gleichung eindeutig lösbar sein. Wenn es keinen Schnittpunkt gibt, muss ein Widerspruch entstehen. Dann verlaufen die Gerade und die Ebene parallel zueinander. Wenn die Gerade in der Ebene liegt, haben sie unendlich viele gemeinsame Punkte, sodass die Gleichung eine wahre Aussage ergibt.

Bei der Untersuchung der Geraden g ergibt sich ein Widerspruch, die Gleichung hat keine Lösung. Somit haben die Gerade g und die Ebene E keine gemeinsamen Punkte und müssen parallel zueinander verlaufen.
Im Falle der Geraden h ist die Gleichung eindeutig lösbar. Es gibt einen gemeinsamen Schnittpunkt. Dieser Schnittpunkt wird ermittelt, indem der für den Parameter erhaltene Wert in die Geradengleichung eingesetzt wird.
Bei der Geraden k entsteht beim Lösen der Gleichung eine wahre Aussage. Die Gleichung hat unendlich viele Lösungen. Somit haben die Gerade k und die Ebene E unendlich viele gemeinsame Punkte und k muss in E liegen.

Aufgabe 3

(1) Mithilfe des Normalenvektors der Ebene wird eine Gerade g durch den Punkt A aufgestellt, die senkrecht zur Ebene E verläuft.
(2) Der Schnittpunkt S der Ebene E und der Geraden g wird bestimmt, indem die Koordinaten der Geraden in die Koordinatengleichung der Ebene eingesetzt werden.
(3) Der Spiegelpunkt A' wird bestimmt, indem ausgehend vom Punkt A der kürzeste Weg bis zur Ebene E und noch einmal die gleiche Strecke zurückgelegt wird. Dieser Weg entspricht dem Doppelten des Vektors $\overrightarrow{AS}$.