AB: Geraden und Ebenen

Mathematik Vektoren 12

① Verbinde die Satzteile, sodass wahre Aussagen zu den Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen entstehen.

Liegt eine Gerade parallel zu einer Ebene, •	○ haben die Gerade und die Ebene genau einen gemeinsamen Schnittpunkt.
Schneidet eine Gerade eine Ebene, •	○ haben die Gerade und die Ebene unendlich viele gemeinsame Punkte.
Liegt eine Gerade in einer Ebene, •	○ haben die Gerade und die Ebene keine gemeinsamen Punkte.

② Ermittle, wie die Geraden zu der Ebene $E: 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -6$ liegen. Gib gegebenenfalls den Schnittpunkt an. Nutze für die Berechnungen dein Heft.

a) $g\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $i\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $h\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

d) $j\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

③ Berechne, für welchen Wert a die Gerade $g\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

in der Ebene $E\colon 5x_1 - 2x_2 - 1x_3 = 2$ liegt.

AB: Geraden und Ebenen

Mathematik Vektoren 12

④ Spiegele den Punkt $A(-5|6|3)$ an der Ebene $E\colon \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} = 0$

⑤ Der Punkt $A(3|4|2)$ wurde an der Ebene E gespiegelt. Der Spiegelpunkt ist $A'(-1|2|0)$.
Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene E.

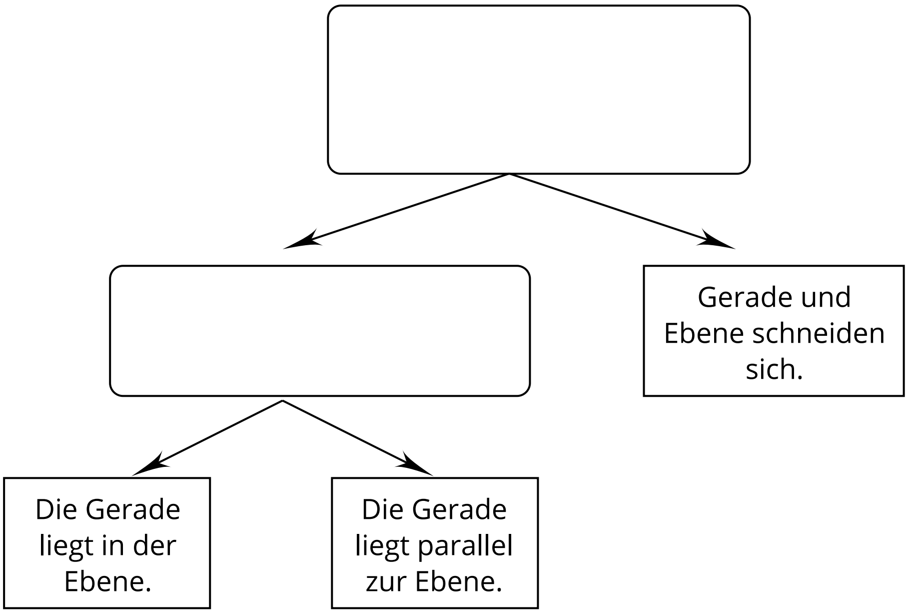
AB: Geraden und Ebenen

Mathematik Vektoren 12

⑥ Neben dem im INPUT gezeigten Verfahren gibt es eine alternative Vorgehensweise zur Untersuchung der Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen. Dabei wird geprüft, ob der Richtungsvektor der Geraden senkrecht zum Normalenvektor der Ebene ist. Wenn das der Fall ist, wird eine Punktprobe durchgeführt.

a) Erstelle mithilfe der Vorlage ein Schema, das das Vorgehen mit dieser Methode beschreibt.

b) Untersuche die Lagebeziehungen der Geraden und der Ebene aus dem INPUT mit diesem Verfahren.



AB: Geraden und Ebenen

Mathematik Vektoren 12

⑦ Die Gerade $g\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ verläuft parallel zu der Ebene $E\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Ermittle eine Geradengleichung der Geraden g', die sich durch Spiegelung der Geraden g an E ergibt.

⑧ Auf einem Berghang steht eine Tanne, die gerade in x_3-Richtung gewachsen ist. Ihre Spitze befindet sich im Punkt P (25|100|130). Die Sonnenstrahlen fallen in Richtung des Vektors

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Der Berghang kann als Ebene $E\colon 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 400$ beschrieben werden. Dabei sind alle Angaben in m.

a) Bestimme den Punkt S, an dem der Schatten der Tanne endet.

b) Berechne die Länge des Schattens.

⑨ Gegeben ist die Geradenschar $g_a: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ a \end{pmatrix}$, mit $a \in \mathbb{R}$. Ermittle eine Normalengleichung der Ebene E, in der alle Geraden der Schar liegen.

⑩ Gegeben ist die Ebenenschar $E_a: \left(\overrightarrow{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} = 0$, mit $a \in \mathbb{R}$. Alle Ebenen der Schar schneiden sich in einer Schnittgeraden g. Ermittle die Gleichung der Schnittgeraden.