AB: Geradengleichungen

Mathematik Vektoren 12

Reflektionsfragen

Bevor du mit den Aufgaben beginnst, solltest du kurz über die folgenden Fragen nachdenken. Wenn du zu einer Frage keine Idee hast, lies noch einmal in der INFO nach.

$\Rightarrow$ Welche beiden Vektoren werden zum Aufstellen einer Geradengleichung benötigt?

$\Rightarrow$ Welcher Punkt wird erreicht, wenn in die Gerade $g\colon \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \overrightarrow{AB}$ für $r = 1$ eingesetzt wird?

$\Rightarrow$ Wie lässt sich prüfen, ob zwei Vektoren linear abhängig sind?

$\Rightarrow$ Was bedeutet es, wenn zwei Geraden windschief zueinander liegen?

... und noch etwas ist Voraussetzung zur Bearbeitung der Aufgaben: Das sichere Lösen von linearen Gleichungssystemen (LGS). Wenn du Schwierigkeiten beim Beantworten der folgenden Fragen hast, solltest du das Thema wiederholen, bevor du mit diesen Aufgaben startest.

$\Rightarrow$ Was muss beachtet werden, wenn ein LGS drei Gleichungen, aber nur zwei Parameter hat?

$\Rightarrow$ Was bedeutet es, wenn beim Lösen eines LGS eine Zeile einen Widerspruch wie 3 = 4 enthält?

① Verbinde Vektoren miteinander, die linear abhängig sind.

$\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \qquad \circ \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \qquad \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} \bullet \qquad \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \qquad \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \qquad \circ \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 2{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \qquad \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

② Durch die Punkte $A(2|0|\text{-}2)$ und $B(1|2|0)$ soll eine Gerade gelegt werden. Markiere alle Geradengleichungen, die diese Gerade beschreiben.

○ $g\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

○ $g\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

○ $g\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

○ $g\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

○ $g\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

③ Gib drei Punkte an, die auf der Geraden h liegen. Beschreibe dein Vorgehen.

$$h\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

④ Jeweils drei der vier Punkte liegen auf einer Geraden. Untersuche, welcher der Punkte nicht auf der Geraden liegt. Nutze für die Berechnungen dein Heft.

a) $A(1|3|5)$, $B(\text{-}2|6|9)$, $C(0|4|7)$, $D(2|2|3)$

b) $A(1|2|\text{-}3)$, $B(\text{-}2|1|0)$, $C(4|3|\text{-}2)$, $D(7|4|\text{-}3)$

⑤ Ermittle, wie die beiden Geraden zueinander liegen. Gib gegebenfalls den Schnittpunkt an. Nutze für die Berechnungen dein Heft.

a) $g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \; h: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}; \; h: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \; h: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}; \; h: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$

⑥ Manchmal lässt sich auf einen Blick erkennen, wie zwei Geraden zueinander liegen. Untersuche die Lagebeziehungen der Geraden ohne schriftliche Rechnung.

a) $g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \; h: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \; h: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

⑦ Jonathan möchte die Lagebeziehung der Geraden g und h untersuchen. Bei der Rechnung ist ihm jedoch ein Fehler unterlaufen. Prüfe seinen Rechenweg und korrigiere seinen Fehler.

$$g\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ \text{-1} \\ 1 \end{pmatrix};\ h\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \text{-2} \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sind die Richtungsvektoren der Geraden linear abhängig?

$$\begin{pmatrix} 2 \\ \text{-1} \\ 1 \end{pmatrix} \neq k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die Richtungsvektoren sind nicht linear abhängig.

Haben die Geraden einen Schnittpunkt?

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ \text{-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \text{-2} \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rrrrl} I. & 3+2s = & 1+ & 3s & \mid -2s-1 \\ II. & 4-1s = & \text{-2}+ & 2s & \mid +1s+2 \\ III. & 2+1s = & 0+ & 2s & \mid -1s \end{array}$$

$$\begin{array}{rrll} I. & 2 = & 1s & \\ II. & 6 = & 3s & \mid :3 \\ III. & 2 = & 1s & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrl} I. & 2 = & s \\ II. & 2 = & s \\ III. & 2 = & s \end{array}$$

$$\overrightarrow{s} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ \text{-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ \text{-2} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Die Geraden schneiden sich im Punkt $S(7|2|4)$.