INPUT: Lagebeziehungen von Ebenen

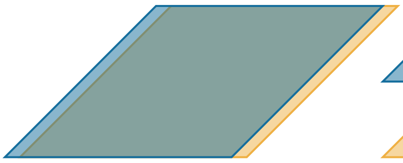
Mathematik Vektoren 12

Arbeitsauftrag

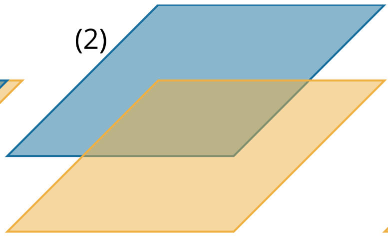
Erarbeite dir die Rechenregeln zu Lagebeziehungen von Ebenen, indem du die Aufgaben löst. Wenn du nicht weiter kommst, findest du die Lösung am Ende des Dokuments.

① Zwei Ebenen können unterschiedlich zueinander liegen. Die Abbildungen zeigen die drei verschiedenen Möglichkeiten.

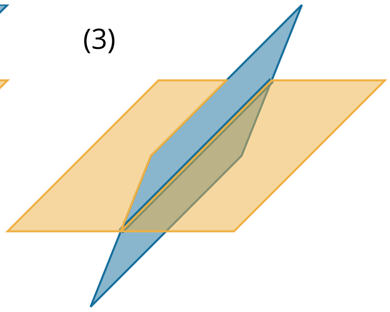
(1)



(2)



(3)

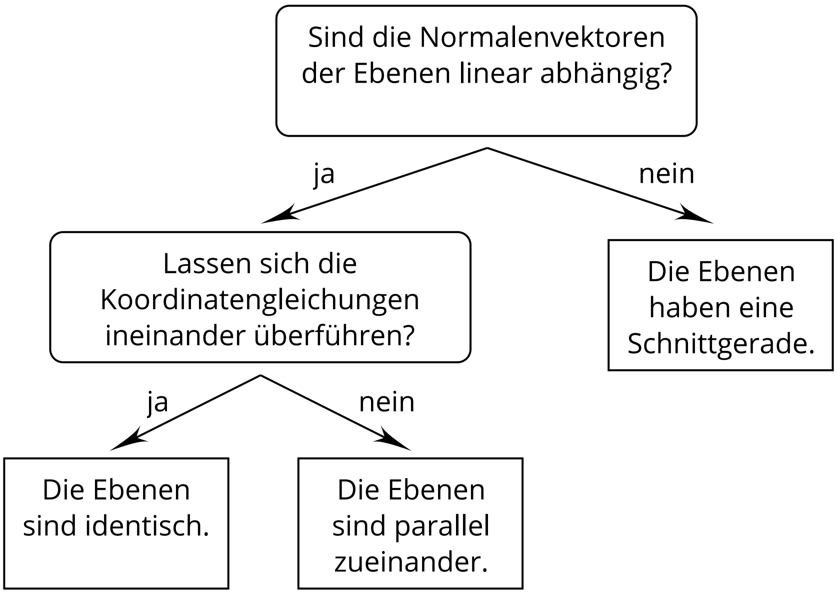


a) Beschreibe, wie die Ebenen zueinander liegen.

b) Gib an, ob die Normalenvektoren der beiden Ebenen in den drei Fällen linear abhängig sind.

c) Gib an, wie viele gemeinsame Punkte die beiden Ebenen in den drei Fällen miteinander haben.

Mithilfe des folgenden Schemas lässt sich systematisch untersuchen, wie zwei Ebenen zueinander liegen.



Beispielaufgabe

Gegeben sind die Ebenen E, F, G und H. Untersuche, wie die Ebenen F, G und H zu E liegen.

$$E\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$F\colon 8x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 16$$

$$G\colon 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2$$

$$H\colon 2x_1 + 2x_2 - 1x_3 = 5$$

② Um die Ebenen untersuchen zu können, sollten alle Ebenen als Koordinatengleichung vorliegen. Die Ebene E wird daher umgewandelt:

Untersuchung der Lagebeziehung von E und F

1) Die Normalenvektoren der beiden Ebenen werden auf lineare Abhängigkeit untersucht:

2) Wenn eine lineare Abhängigkeit vorliegt, wird geprüft, ob sich die Ebenengleichungen ineinander umwandeln lassen:

3) Die beiden Normalenvektoren der Ebenen sind

- ○ linear abhängig.
- ○ nicht linear abhängig.

Die beiden Ebenengleichungen lassen sich

- ○ ineinander umwandeln.
- ○ nicht ineinander umwandeln.

Die beiden Ebenen

- ○ sind identisch.
- ○ sind parallel.
- ○ haben eine Schnittgerade.

Untersuchung der Lagebeziehung von E und G

Führe die Schritte 1) bis 3) für die Ebenen E und G durch.

Untersuchung der Lagebeziehung von E und H

Führe die Schritte 1) bis 3) für die Ebenen E und H durch.

Lösung

Aufgabe 1
a) (1) Die Ebenen sind identisch.
(2) Die Ebenen sind parallel zueinander.
(3) Die Ebenen haben eine Schnittgerade.

b) (1) und (2) Die Normalenvektoren der Ebenen sind linear abhängig.
(3) Die Normalenvektoren der Ebenen sind nicht linear abhängig.

c) (1) und (3) Die Ebenen haben unendlich viele gemeinsame Punkte.
(2) Die Ebenen haben keine gemeinsamen Punkte.

Aufgabe 2
Umwandlung der Ebene E in eine Koordinatengleichung

$$E: 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 8$$

Untersuchung der Lagebeziehung von E und F

1) Die Normalenvektoren der beiden Ebenen werden auf lineare Abhängigkeit untersucht:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ \text{-}3 \end{pmatrix} = 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ \text{-}6 \end{pmatrix}$$

2) Wenn eine lineare Abhängigkeit vorliegt, wird geprüft, ob sich die Ebenengleichungen ineinander umwandeln lassen:

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 8 \quad | \cdot 2$$

$$8x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 16$$

3) Die beiden Normalenvektoren der Ebenen sind linear abhängig. Die beiden Ebenengleichungen lassen sich ineinander umwandeln. Die beiden Ebenen sind identisch.

Lösung

Fortsetzung von Aufgabe 2

Untersuchung der Lagebeziehung von E und G

1) Die Normalenvektoren der beiden Ebenen werden auf lineare Abhängigkeit untersucht:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

2) Wenn eine lineare Abhängigkeit vorliegt, wird geprüft, ob sich die Ebenengleichungen ineinander umwandeln lassen:

$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = \ 8$ lässt sich nicht durch Äquivalenzumformungen in

$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = \ -2$ umwandeln.

3) Die beiden Normalenvektoren der Ebenen sind linear abhängig. Die beiden Ebenengleichungen lassen sich nicht ineinander umwandeln. Die beiden Ebenen sind parallel.

Untersuchung der Lagebeziehung von E und H

1) Die Normalenvektoren der beiden Ebenen werden auf lineare Abhängigkeit untersucht:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \neq k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2) entfällt

3) Die beiden Normalenvektoren der Ebenen sind nicht linear abhängig. Die beiden Ebenengleichungen lassen sich nicht ineinander umwandeln. Die beiden Ebenen haben eine Schnittgerade.