

# INPUT: Lagebeziehungen von Ebenen

Mathematik Vektoren 12

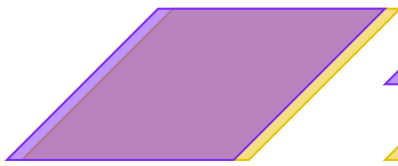


## Arbeitsauftrag

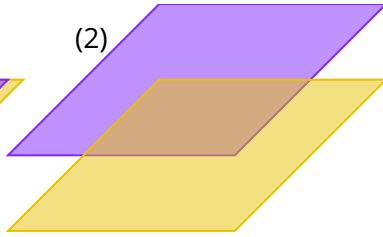
Erarbeite dir die Rechenregeln zu Lagebeziehungen von Ebenen, indem du die Aufgaben löst. Wenn du nicht weiter kommst, findest du die Lösung am Ende des Dokuments.

- ① Zwei Ebenen können unterschiedlich zueinander liegen. Die Abbildungen zeigen die drei verschiedenen Möglichkeiten.

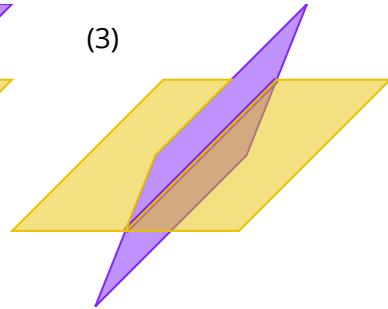
(1)



(2)



(3)



a) Beschreibe, wie die Ebenen zueinander liegen.

---

---

---

---

b) Gib an, ob die Normalenvektoren der beiden Ebenen in den drei Fällen linear abhängig sind.

---

---

---

---

c) Gib an, wie viele gemeinsame Punkte die beiden Ebenen in den drei Fällen miteinander haben.

---

---

---

---



## Mathematik Vektoren 12

```
graph TD
    A[Sind die Normalenvektoren  
der Ebenen linear abhängig?] -- ja --> B[Lassen sich die  
Koordinatengleichungen  
ineinander überführen?]
    A -- nein --> C[Die Ebenen  
haben eine  
Schnittgerade.]
    B -- ja --> D[Die Ebenen  
sind identisch.]
    B -- nein --> E[Die Ebenen  
sind parallel  
zueinander.]
```

$$H: 2x_1 + 2x_2 - 1x_3 = 5$$

- [illegible]





# INPUT: Lagebeziehungen von Ebenen

Mathematik Vektoren 12

## Lösung

### Aufgabe 1

- a) (1) Die Ebenen sind identisch.  
(2) Die Ebenen sind parallel zueinander.  
(3) Die Ebenen haben eine Schnittgerade.
- b) (1) und (2) Die Normalenvektoren der Ebenen sind linear abhängig.  
(3) Die Normalenvektoren der Ebenen sind nicht linear abhängig.
- c) (1) und (3) Die Ebenen haben unendlich viele gemeinsame Punkte.  
(2) Die Ebenen haben keine gemeinsamen Punkte.

### Aufgabe 2

#### Umwandlung der Ebene $E$ in eine Koordinatengleichung

$$E: 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 8$$

#### Untersuchung der Lagebeziehung von $E$ und $F$

- 1) Die Normalenvektoren der beiden Ebenen werden auf lineare Abhängigkeit untersucht:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 0,5 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

- 2) Wenn eine lineare Abhängigkeit vorliegt, wird geprüft, ob sich die Ebenengleichungen ineinander umwandeln lassen:

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 8 \quad | \cdot 2$$

$$8x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 16$$

- 3) Die beiden Normalenvektoren der Ebenen sind linear abhängig. Die beiden Ebenengleichungen lassen sich ineinander umwandeln. Die beiden Ebenen sind identisch.





# INPUT: Lagebeziehungen von Ebenen

Mathematik Vektoren 12

## Lösung

Fortsetzung von Aufgabe 2

### Untersuchung der Lagebeziehung von $E$ und $G$

1) Die Normalenvektoren der beiden Ebenen werden auf lineare Abhängigkeit untersucht:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

2) Wenn eine lineare Abhängigkeit vorliegt, wird geprüft, ob sich die Ebenengleichungen ineinander umwandeln lassen:

$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 8$  lässt sich nicht durch Äquivalenzumformungen in

$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2$  umwandeln.

3) Die beiden Normalenvektoren der Ebenen sind linear abhängig. Die beiden Ebenengleichungen lassen sich nicht ineinander umwandeln. Die beiden Ebenen sind parallel.

### Untersuchung der Lagebeziehung von $E$ und $H$

1) Die Normalenvektoren der beiden Ebenen werden auf lineare Abhängigkeit untersucht:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \neq k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2) entfällt

3) Die beiden Normalenvektoren der Ebenen sind nicht linear abhängig. Die beiden Ebenengleichungen lassen sich nicht ineinander umwandeln. Die beiden Ebenen haben eine Schnittgerade.

