INFO: LGS in der Matrixschreibweise lösen

Mathematik Gleichungen

Das folgende LGS soll gelöst werden:

$$\begin{array}{rrrrrrrr} I. & 2x_1 & - & 3x_2 & + & 1x_3 & = & 5 \\ II. & 3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ III. & 1x_1 & + & 1x_2 & + & 2x_3 & = & \text{-}1 \end{array}$$

Eine übersichtliche Darstellungsform für ein LGS ist die Matrixschreibweise. Dafür werden die Variablen weggelassen. Auf der linken Seite bleiben die Koeffizienten stehen. Auf der rechten Seite bleiben die Zahlen. Sie werden durch eine senkrechte Linie abgetrennt:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Die Rechnung erfolgt nach den allgemeinen Regeln zum Lösen eines LGS.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} |\cdot(-3) \\ |\cdot 2 \\ |\cdot 6 \end{array}$$

Die Gleichungen werden multipliziert, um in der ersten Spalte der Matrix Zahl und Gegenzahl stehen zu haben.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -6 & 9 & -3 & -15 \\ 6 & -4 & 4 & 6 \\ 6 & 6 & 12 & -6 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} |\ :(-3) \\ |\ I+II \\ |\ I+III \end{array}$$

Die Zeilen werden addiert, sodass sich die Zahlen in der ersten Spalte gegenseitig aufheben.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & -9 \\ 0 & 15 & 9 & -21 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ |\ :(-3) \end{array}$$

Wo sich die Zahlen bei der Addition gegenseitig aufgehoben haben, werden in der Matrix Nullen eingetragen.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & -9 \\ 0 & -5 & -3 & 7 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ |\ II+III \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

An dieser Stelle ist es möglich, die Matrixschreibweise wieder gegen die normale Schreibweise einzutauschen und das LGS auf dem bekannten Weg durch Umstellen und Einsetzen zu lösen. Alternativ kann aber auch mit der Matrix weitergerechnet werden, bis eine Einheitsmatrix vorliegt.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ \mid\ :2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \mid I + III \\ \mid II + III \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \mid \cdot 5 \\ \mid \cdot 3 \\ \mid\ :(-1) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -15 & 0 & 20 \\ 0 & 15 & 0 & -30 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \mid I + II \\ \mid\ :15 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \mid\ :(-10) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$L = \{-1; -2; 1\}$

Die Matrix auf der linken Seite der durchgezogenen Linie wird **Einheitsmatrix** genannt. Eine Einheitsmatrix ist immer quadratisch, hat an jeder Position der Diagonalen eine Eins stehen und enthält sonst nur Nullen. In dieser Darstellungsform kann die Lösungsmenge direkt abgelesen werden: Es handelt sich um die Zahlen auf der rechten Seite.

Mit einer Probe lässt sich zeigen, dass die berechneten Werte richtig sind:

$$\begin{array}{rrrrcr} I. & 2\cdot(-1) & -\ 3\cdot(-2) & +\ 1\cdot 1 & = & 5\ \checkmark \\ II. & 3\cdot(-1) & -\ 2\cdot(-2) & +\ 2\cdot 1 & = & 3\ \checkmark \\ III. & 1\cdot(-1) & +\ 1\cdot(-2) & +\ 2\cdot 1 & = & -1\ \checkmark \end{array}$$