INFO: LGS mit einem Parameter lösen

Mathematik Gleichungen

Das folgende LGS in der Matrixschreibweise soll gelöst werden:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 1 & 4r & + & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 4r & + & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 2r & + & 1 \end{array}\right)$$

Schon auf den ersten Blick fällt auf, dass das LGS eine Besonderheit aufweist: Es enthält in der rechten Spalte nicht nur Zahlen, sondern auch den Parameter r. Dieser ändert jedoch am Vorgehen nichts. Das LGS wird wie gewohnt gelöst, indem eine Einheitsmatrix gebildet wird.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 1 & 4r & + & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 4r & + & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 2r & + & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} |\cdot(\text{-}2) \\ |\cdot 3 \\ |\cdot 6 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & -2 & -2 & -8r & - & 2 \\ 6 & 6 & 15 & 12r & + & 24 \\ 6 & 6 & 6 & 12r & + & 6 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} |\ :(\text{-}2) \\ |\ I + II \\ |\ I + III \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 1 & 4r & + & 1 \\ 0 & 4 & 13 & 4r & + & 22 \\ 0 & 4 & 4 & 4r & + & 4 \end{array}\right) \quad |\cdot(\text{-}1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 1 & 4r & + & 1 \\ 0 & -4 & -13 & -4r & - & 22 \\ 0 & 4 & 4 & 4r & + & 4 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ |\ II + III \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 1 & 4r & + & 1 \\ 0 & -4 & -13 & -4r & - & 22 \\ 0 & 0 & -9 & & & -18 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ |\ :(\text{-}9) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 1 & 4r & + & 1 \\ 0 & -4 & -13 & -4r & - & 22 \\ 0 & 0 & 1 & & & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} |\cdot(\text{-}13) \\ \\ |\cdot 13 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -39 & -13 & -13 & -52r & - & 13 \\ 0 & -4 & -13 & -4r & - & 22 \\ 0 & 0 & 13 & & & 26 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\ I + III \\ |\ II + III \\ |\ :13 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -39 & -13 & 0 & -52r & + & 13 \\ 0 & -4 & 0 & -4r & + & 4 \\ 0 & 0 & 1 & & & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \mid\ :13 \\ \mid\ :(-4) \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & -1 & 0 & -4r & + & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1r & - & 1 \\ 0 & 0 & 1 & & & 2 \end{array}\right) \quad \mid I + II$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 0 & -3r & & \\ 0 & 1 & 0 & 1r & - & 1 \\ 0 & 0 & 1 & & & 2 \end{array}\right) \quad \mid\ :(-3)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1r & & \\ 0 & 1 & 0 & 1r & - & 1 \\ 0 & 0 & 1 & & & 2 \end{array}\right)$$

> Nachdem eine Einheitsmatrix gebildet wurde, können auf der rechten Seite der Matrix sowohl Zahlen als auch Terme, die den Parameter enthalten, stehen. Diese werden wie gewohnt in der Lösungsmenge angegeben.

$$L = \{1r; 1r - 1; 2\}$$

> Ein LGS, das in der Lösungsmenge mindestens einen Parameter enthält, hat immer unendlich viele Lösungen, da für den Parameter verschiedene Zahlen eingesetzt werden können. Das gilt auch für das LGS in diesem Beispiel.

Mit einer Probe lässt sich zeigen, dass die berechneten Werte richtig sind:

$$\begin{array}{rlllll} I. & 3 \cdot 1r & + 1 \cdot (1r - 1) & + 1 \cdot 2 & = 3r + 1r - 1 + 2 & = 4r + 1 \checkmark \\ II. & 2 \cdot 1r & + 2 \cdot (1r - 1) & + 5 \cdot 2 & = 2r + 2r - 2 + 10 & = 4r + 8 \checkmark \\ III. & 1 \cdot 1r & + 1 \cdot (1r - 1) & + 1 \cdot 2 & = 1r + 1r - 1 + 2 & = 2r + 1 \checkmark \end{array}$$