INFO: LGS mit mehr als drei Gleichungen

Mathematik Gleichungen

Ein LGS kann beliebig viele Gleichungen haben. Das Vorgehen ist dabei analog zum Lösen eines LGS mit zwei oder drei Gleichungen. Das Beispiel zeigt den Lösungsweg für ein LGS mit 4 Gleichungen und 4 Variablen.

$$
\begin{array}{rrrrrcr}
I. & 1x_1 & + \ 2x_2 & + \ 3x_3 & - \ 2x_4 & = & 2 \\
II. & -1x_1 & - \ 2x_2 & - \ 3x_3 & + \ 1x_4 & = & -5 \\
III. & -1x_1 & - \ 1x_2 & + \ 1x_3 & + \ 2x_4 & = & 4 \\
IV. & -1x_1 & + \ 2x_2 & + \ 3x_3 & + \ 3x_4 & = & 15
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & 2 & 3 & -2 & 2 \\
-1 & -2 & -3 & 1 & -5 \\
-1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\
-1 & 2 & 3 & 3 & 15
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\
\mid I + II \\
\mid I + III \\
\mid I + IV
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & 2 & 3 & -2 & 2 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -3 \\
0 & 1 & 4 & 0 & 6 \\
0 & 4 & 6 & 1 & 17
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\
\mid IV \\
\mid \cdot (-4) \\
\mid II
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & 2 & 3 & -2 & 2 \\
0 & 4 & 6 & 1 & 17 \\
0 & -4 & -16 & 0 & -24 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -3
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\
\\
\mid II + III \\
\\
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{rrrr|r}
1 & 2 & 3 & -2 & 2 \\
0 & 4 & 6 & 1 & 17 \\
0 & 0 & -10 & 1 & -7 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -3
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\mid \cdot (-1) \\
\mid \cdot 2 \\
\mid \cdot 2 \\
\mid \cdot 2
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{rrrr|r}
-1 & -2 & -3 & 2 & -2 \\
0 & 8 & 12 & 2 & 34 \\
0 & 0 & -20 & 2 & -14 \\
0 & 0 & 0 & -2 & -6
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\mid I + IV \\
\mid II + IV \\
\mid III + IV \\
\mid \ : (-2)
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{rrrr|r}
-1 & -2 & -3 & 0 & -8 \\
0 & 8 & 12 & 0 & -28 \\
0 & 0 & -20 & 0 & -20 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 3
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\
\mid \ : 4 \\
\mid \ : (-20) \\
\\
\end{array}
$$

Bei einem LGS mit mehr als drei Gleichungen gelten die gleichen Regeln wie bei einem LGS mit weniger Gleichungen:

- Zeilen dürfen addiert werden.
- Zeilen dürfen getauscht werden.
- Zeilen dürfen mit einem Koeffizienten multipliziert und dividiert werden.

Wenn die Zahlen zu groß werden, kann sich ein Zwischenschritt lohnen, in dem die ganze Zeile durch den größten gemeinsamen Teiler geteilt wird. So bleiben die Zahlen übersichtlich.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & -3 & 0 & -8 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \mid \cdot (-1) \\ \\ \mid \cdot (-3) \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \mid I + III \\ \mid II + III \\ \mid \; : (-3) \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \mid \cdot (-1) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \mid I + II \\ \mid \; : (-2) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Aus der Einheitsmatrix lässt sich die Lösungsmenge direkt ablesen.

$$L = \{1; 2; 1; 3\}$$

Mit einer Probe lässt sich zeigen, dass die ermittelte Lösungsmenge richtig ist.

$$\begin{array}{rrrrrrl} I. & 1 \cdot 1 & + \; 2 \cdot 2 & + \; 3 \cdot 1 & - \; 2 \cdot 3 & = & 2 \checkmark \\ II. & -1 \cdot 1 & - \; 2 \cdot 2 & - \; 3 \cdot 1 & + \; 1 \cdot 3 & = & -5 \checkmark \\ III. & -1 \cdot 1 & - \; 1 \cdot 2 & + \; 1 \cdot 1 & + \; 2 \cdot 3 & = & 4 \checkmark \\ IV. & -1 \cdot 1 & + \; 2 \cdot 2 & + \; 3 \cdot 1 & + \; 3 \cdot 3 & = & 15 \checkmark \end{array}$$