

Ein LGS kann beliebig viele Gleichungen haben. Das Vorgehen ist dabei analog zum Lösen eines LGS mit zwei oder drei Gleichungen. Das Beispiel zeigt den Lösungsweg für ein LGS mit 4 Gleichungen und 4 Variablen.

$$I. \quad 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2$$

$$II. \quad -1x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 1x_4 = -5$$

$$III. \quad -1x_1 - 1x_2 + 1x_3 + 2x_4 = 4$$

$$IV. \quad -1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 15$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & -3 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 3 & 15 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} | I + II \\ | I + III \\ | I + IV \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 6 & 1 & 17 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} | IV \\ | \cdot (-4) \\ | II \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 6 & 1 & 17 \\ 0 & -4 & -16 & 0 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right) \quad | II + III$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 6 & 1 & 17 \\ 0 & 0 & -10 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} | \cdot (-1) \\ | \cdot 2 \\ | \cdot 2 \\ | \cdot 2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 8 & 12 & 2 & 34 \\ 0 & 0 & -20 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} | I + IV \\ | II + IV \\ | III + IV \\ | : (-2) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & -3 & 0 & -8 \\ 0 & 8 & 12 & 0 & -28 \\ 0 & 0 & -20 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} | : 4 \\ | : (-20) \end{array}$$

💡 Bei einem LGS mit mehr als drei Gleichungen gelten die gleichen Regeln wie bei einem LGS mit weniger Gleichungen:

- Zeilen dürfen addiert werden.
- Zeilen dürfen getauscht werden.
- Zeilen dürfen mit einem Koeffizienten multipliziert und dividiert werden.

💡 Wenn die Zahlen zu groß werden, kann sich ein Zwischenschritt lohnen, in dem die ganze Zeile durch den größten gemeinsamen Teiler geteilt wird. So bleiben die Zahlen übersichtlich.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & -3 & 0 & -8 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} | \cdot (-1) \\ \\ | \cdot (-3) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} | I + III \\ | II + III \\ | : (-3) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \quad | \cdot (-1)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} | I + II \\ | : (-2) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

💡 Aus der Einheitsmatrix lässt sich die Lösungsmenge direkt ablesen.

$$L = \{1; 2; 1; 3\}$$

Mit einer Probe lässt sich zeigen, dass die ermittelte Lösungsmenge richtig ist.

$$I. \quad 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = 2 \checkmark$$

$$II. \quad -1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = -5 \checkmark$$

$$III. \quad -1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 4 \checkmark$$

$$IV. \quad -1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 15 \checkmark$$