INFO: Lineare Funktionen

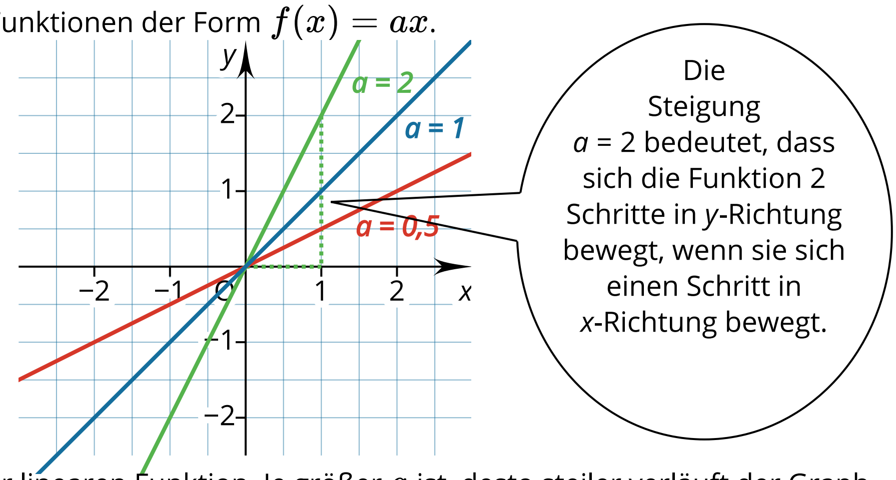
Mathematik Funktionen 11

Was ist eine lineare Funktion?

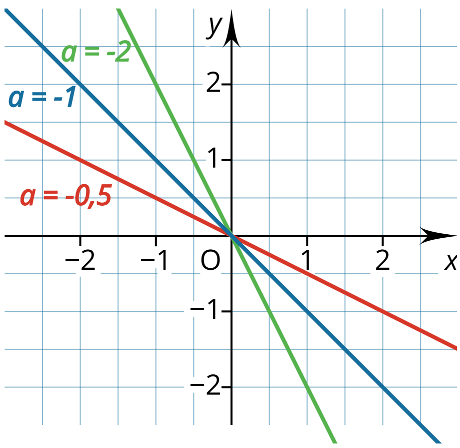
Eine lineare Funktion ist eine Funktion, deren Funktionsgleichung die Form $f(x) = ax + b$ hat, wobei $a \neq 0$ sein muss. Dabei ist a die Steigung der Funktion und b der y-Achsenabschnitt.
Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade.

Welchen Einfluss hat die Steigung a auf den Verlauf des Graphen einer linearen Funktion?

Die Steigung a gibt an, wie weit sich der Graph einer linearen Funktion in y-Richtung bewegt, wenn er sich um genau einen Schritt in x-Richtung bewegt.
Die folgende Abbildung zeigt Funktionen der Form $f(x) = ax$.



Für $a > 0$ steigt der Graph der linearen Funktion. Je größer a ist, desto steiler verläuft der Graph der Funktion.
Die nächste Abbildung zeigt die Graphen linearer Funktionen, bei denen a negativ ist.



Für $a < 0$ fällt der Graph einer linearen Funktion.

Proportionale Funktionen

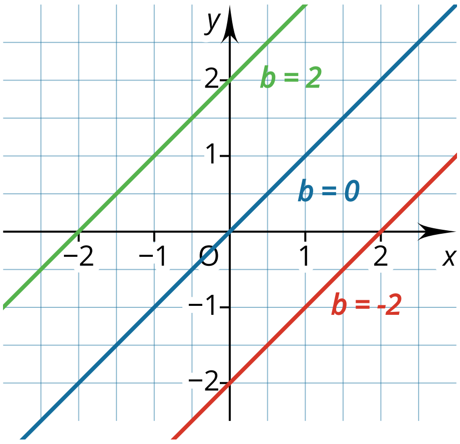
Lineare Funktionen, bei denen der y-Achsenabschnitt null ist, die also die Form $f(x) = ax$ haben, gehen immer durch den Ursprung. Sie werden auch als proportionale Funktionen bezeichnet.

INFO: Lineare Funktionen

Mathematik Funktionen 11

Welchen Einfluss hat der y-Achsenabschnitt b auf den Verlauf einer linearen Funktion?

Die folgende Abbildung zeigt Funktionen der Form $y = 1x + b$.



Der y-Achsenabschnitt b gibt an, wo die y-Achse geschnitten wird. Für $b > 0$ wird der Graph der Funktion nach oben verschoben. Für $b < 0$ wird der Graph der Funktion nach unten verschoben.

Wie lässt sich eine Geradengleichung aufstellen?

Um die Funktionsgleichung einer linearen Funktion zu bestimmen, müssen zwei Informationen bekannt sein. Als Informationen eignen sich Punkte der Funktion, die Steigung a oder der y-Achsenabschnitt b. Je nachdem, welche Informationen gegeben sind, ist ein unterschiedliches Vorgehen erforderlich.

Wenn der Graph der Funktion vorliegt, können die Informationen aus der Abbildung entnommen werden.

Beispielaufgabe

Bestimme die Funktionsgleichung der beschriebenen Funktion.

a) Der Graph der linearen Funktion $f(x)$ schneidet die y-Achse bei -2 und geht durch den Punkt $P(1|2)$.

b) Die Punkte $A(-2|3)$ und $B(4|-3)$ liegen auf dem Graphen der linearen Funktion $g(x)$.

Rechenweg

a) $f(x) = ax + b$

$b = -2$

$f(x) = ax - 2$

$f(1) = 2$

$2 = a \cdot 1 - 2$

$a = 4$

$f(x) = 4x - 2$

b) $g(x) = ax + b$

$a = \frac{-3 - 3}{4 - (-)2} = -1$

$g(x) = -1x + b$

$g(-2) = 3$

$3 = -1 \cdot (-2) + b$

$b = 1$

$g(x) = -1x + 1$

Die Steigung a einer linearen Funktion lässt sich mit folgender Formel bestimmen, wenn zwei Punkte $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$ gegeben sind:

$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Wie lässt sich die Nullstelle einer linearen Funktion bestimmen?
Für die Bestimmung einer Nullstelle wird die Funktion gleich Null gesetzt. So entsteht eine Gleichung, die nach x aufgelöst werden kann.

Beispielaufgabe
Berechne die Nullstelle der Funktion $f(x) = 4x + 6$.

Rechenweg

$$f(x) = 0$$
$$0 = 4x + 6$$
$$x = \text{-}1{,}5$$

Wie lässt sich anhand der Funktionsgleichungen erkennen, wie zwei Geraden zueinander liegen?
Zwei Geraden verlaufen parallel zueinander, wenn sie die gleiche Steigung a haben. In allen anderen Fällen schneiden sie sich. Wenn sie sich senkrecht schneiden, ist das Produkt ihrer Steigungen $\text{-}1$.

Beispielaufgabe
Zeige, dass sich die Funktionen $f(x) = 2x + 1$ und $g(x) = \text{-}0{,}5x - 4$ senkrecht schneiden.

Rechenweg

$$2 \cdot (\text{-}0{,}5) = \text{-}1$$
$\Rightarrow$ Die Geraden schneiden sich senkrecht.

Wie lässt sich der Schnittpunkt zweier Geraden bestimmen?
Um den Schnittpunkt zweier Geraden zu bestimmen, werden ihre Funktionsgleichungen gleichgesetzt. So entsteht eine Gleichung, die nach x aufgelöst werden kann. Der Wert von x wird in eine beliebige der beiden Funktionsgleichungen eingesetzt, um die y-Koordinate des Schnittpunktes zu ermitteln.

Beispielaufgabe
Ermittle den Schnittpunkt der Funktionen $f(x) = 2x + 1$ und $g(x) = \text{-}0{,}5x - 4$.

Rechenweg

$$f(x) = g(x)$$
$$2x + 1 = \text{-}0{,}5x - 4$$
$$x = \text{-}2$$
$$f(\text{-}2) = \text{-}3$$
$$S(\text{-}2|\text{-}3)$$