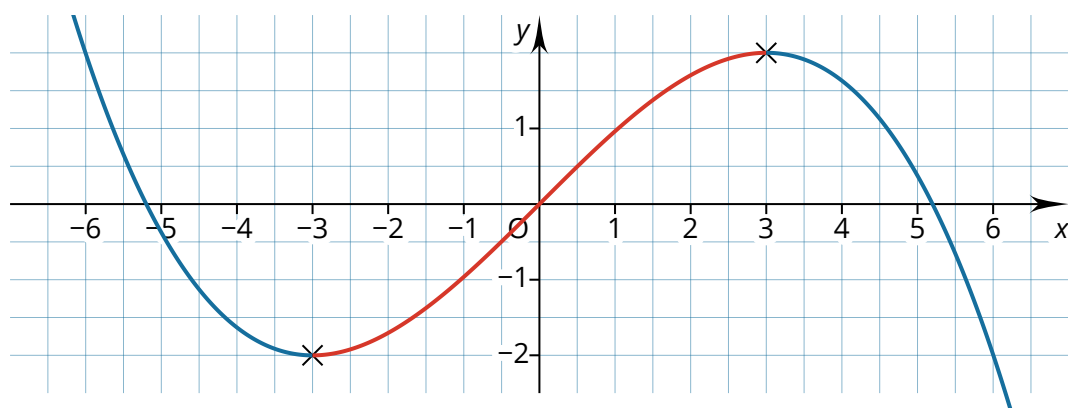


Was sind die Extrempunkte einer Funktion?

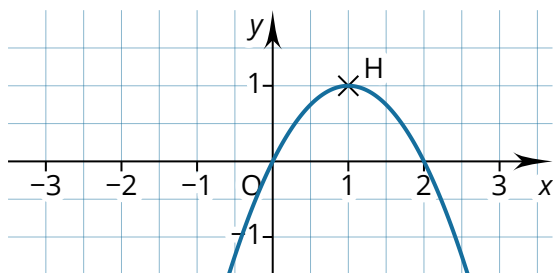
Die Abbildung zeigt eine ganzrationale Funktion dritten Grades. Bereiche, in denen die Funktion fällt, sind blau markiert. Bereiche, in denen die Funktion steigt, sind rot markiert.



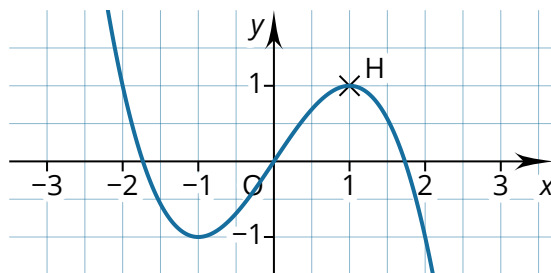
In der Abbildung sind zwei Punkte eingezeichnet. Es handelt sich um die Extrempunkte der Funktion. Der Punkt $T(-3|-2)$ ist ein Tiefpunkt. Der Punkt $H(3|2)$ ist ein Hochpunkt. Anstelle von Tiefpunkt und Hochpunkt werden auch die Begriffe Maximum und Minimum verwendet. In den Extrempunkten ist die Steigung der Funktion null.

Was ist der Unterschied zwischen einem lokalen und einem globalen Maximum?

Handelt es sich bei einem Hochpunkt um den höchsten Punkt im gesamten Graphen einer Funktion, wird der Hochpunkt als globales Maximum bezeichnet. Gibt es hingegen in der Funktion noch andere Punkte, die höher liegen als der Hochpunkt, wird der Hochpunkt als lokales Maximum bezeichnet.

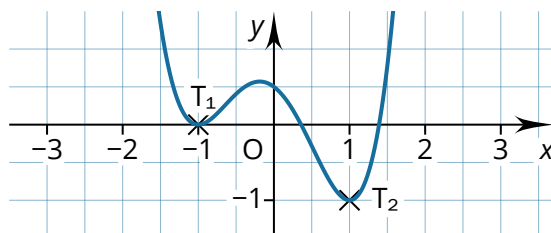


Der Punkt $H(1|1)$ ist ein globales Maximum, da kein anderer Punkt des Graphen höher liegt.



Der Punkt $H(1|1)$ ist ein lokales Maximum, da andere Punkte des Graphen höher liegen.

Analog ist es bei lokalen und globalen Minima: Handelt es sich bei einem Tiefpunkt um den tiefsten Punkt des gesamten Graphen, ist es ein globales Minimum. Gibt es hingegen andere Punkte, die tiefer liegen, ist es ein lokales Minimum.



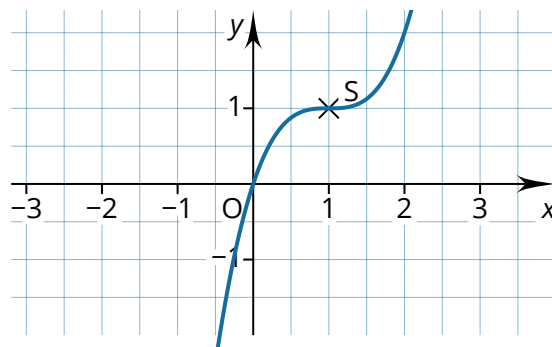
Der Punkt $T_1(-1|0)$ ist ein lokales Minimum, der Punkt $T_2(1|-1)$ ist ein globales Minimum.

Was ist ein Sattelpunkt?

Neben Extrempunkten gibt es weitere Punkte, in denen die Steigung null ist. Solche Punkte werden als Sattelpunkte bezeichnet.

Die Abbildung zeigt eine Funktion dritten Grades. Sie enthält den Sattelpunkt $S(1|1)$.

Die Funktion steigt vor und nach dem Sattelpunkt. Im Sattelpunkt selbst ist die Steigung null.

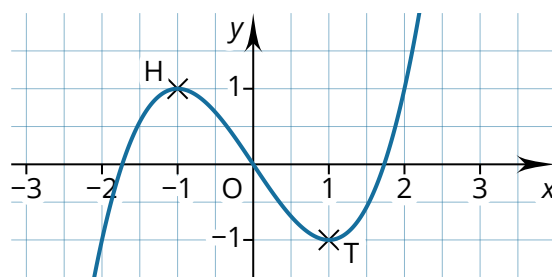


Was ist das Monotonieverhalten eines Graphen?

Wenn das Monotonieverhalten eines Graphen untersucht werden soll, ist damit gemeint, dass angegeben wird, in welchen Bereichen eine Funktion steigt oder fällt. Die Extrempunkte stellen dabei besondere Punkte einer Funktion dar, da die Funktion in diesen Punkten weder steigt noch fällt.

Beispielaufgabe

Beschreibe das Monotonieverhalten der Funktion.



Lösung

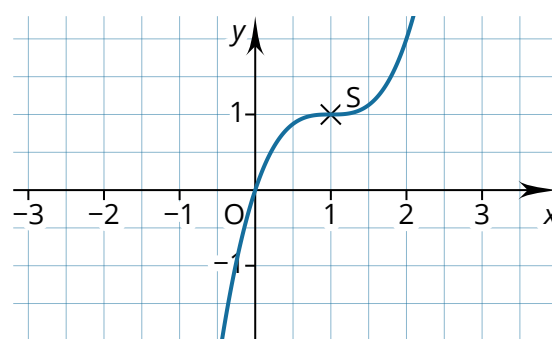
Die Funktion ist monoton steigend für $x \leq -1$ und $x \geq 1$ und monoton fallend für $-1 \leq x \leq 1$.

Was ist der Unterschied zwischen monoton und streng monoton?

Wenn das Monotonieverhalten eines Graphen als monoton steigend beschrieben wird, bedeutet das, dass die Funktion im beschriebenen Bereich größer oder gleich null ist. Sie darf also alles außer fallen. Wird hingegen gesagt, dass die Funktion streng monoton steigend ist, muss die Steigung positiv sein, darf somit nicht null sein.

Entsprechend hat eine Funktion in einem Bereich, in dem sie streng monoton fallend ist, eine negative Steigung. Ist die Steigung hingegen nur monoton fallend, kann sie auch null sein.

Für die dargestellte Funktion mit dem Sattelpunkt gilt daher: Sie ist monoton steigend für $-\infty \leq x \leq \infty$, aber streng monoton steigend für $x < 1$ und $x > 1$.



Das Zeichen $<$ bedeutet „kleiner als“. Das Zeichen \leq bedeutet hingegen „kleiner oder gleich“, schließt also die Zahl selbst mit ein.