Arbeitsauftrag

Erarbeite dir die Regeln zum Bestimmen von Nullstellen, indem du die folgenden Aufgaben bearbeitest. Wenn du nicht weiter kommst, findest du die Lösungen am Ende des Dokuments.

Was ist eine Nullstelle?

Als Nullstellen werden die x-Werte bezeichnet, deren Funktionswert $y = 0$ ist. Der Graph einer Funktion schneidet oder berührt an einer Nullstelle die x-Achse.

① a) Zeichne den Graphen der linearen Funktion mit der Funktionsgleichung $f(x) = -0{,}5x + 1$ und markiere die Nullstelle.

b) Gib die Nullstelle und den Schnittpunkt mit der x-Achse an.

② a) Zeichne den Graphen der quadratischen Funktion mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^2 - 2x$ und markiere die Nullstellen.

b) Gib die Nullstellen und die Schnittpunkte mit der x-Achse an.

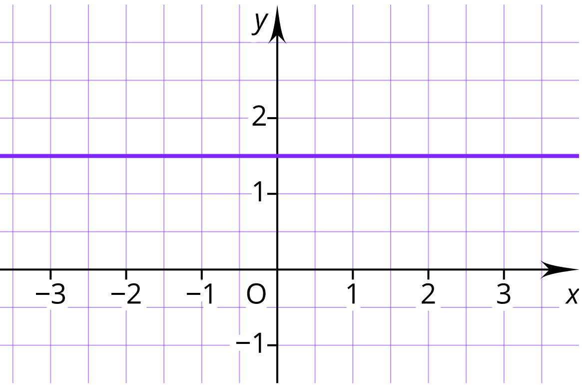
INPUT: Nullstellen berechnen

Mathematik Funktionen 11

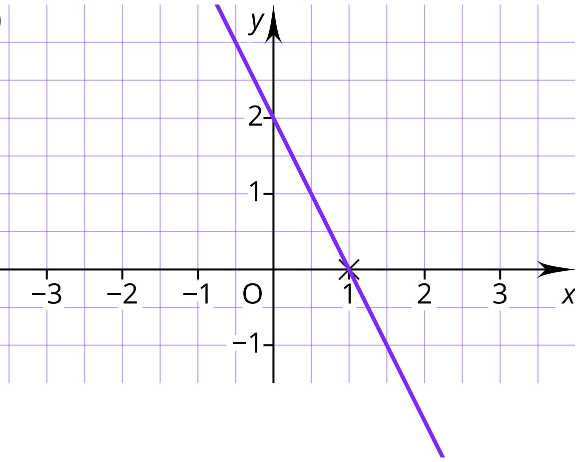
Wie viele Nullstellen hat eine Funktion?
Die Anzahl der Nullstellen hängt vom Grad einer ganzrationalen Funktion ab. Sie kann immer maximal so viele Nullstellen haben, wie ihr Grad ist. Es können aber auch weniger sein.

③ Ordne die Bildunterschriften den Bildern zu.

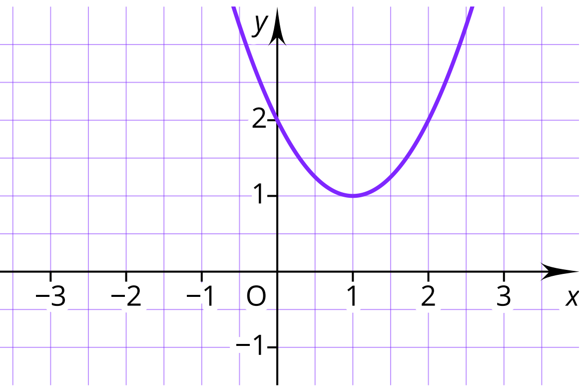
a)



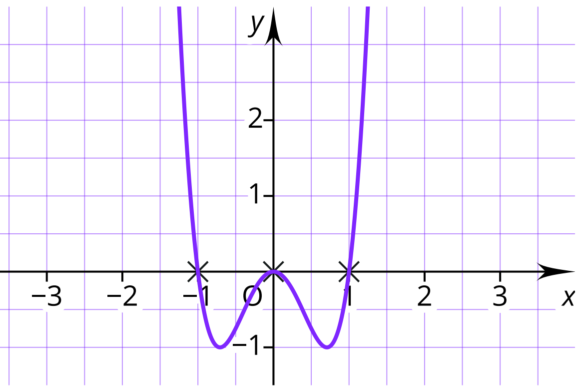
b)



c)



d)



(1) *Diese quadratische Funktion hat keine Nullstellen.*

(2) *Diese Funktion vierten Grades hat drei Nullstellen. Würde sie ein Stück nach oben verschoben werden, hätte sie 4 Nullstellen.*

(3) *Eine lineare Funktion hat immer genau eine Nullstelle.*

(4) *Die konstante Funktion hat keine Nullstellen.*

INPUT: Nullstellen berechnen

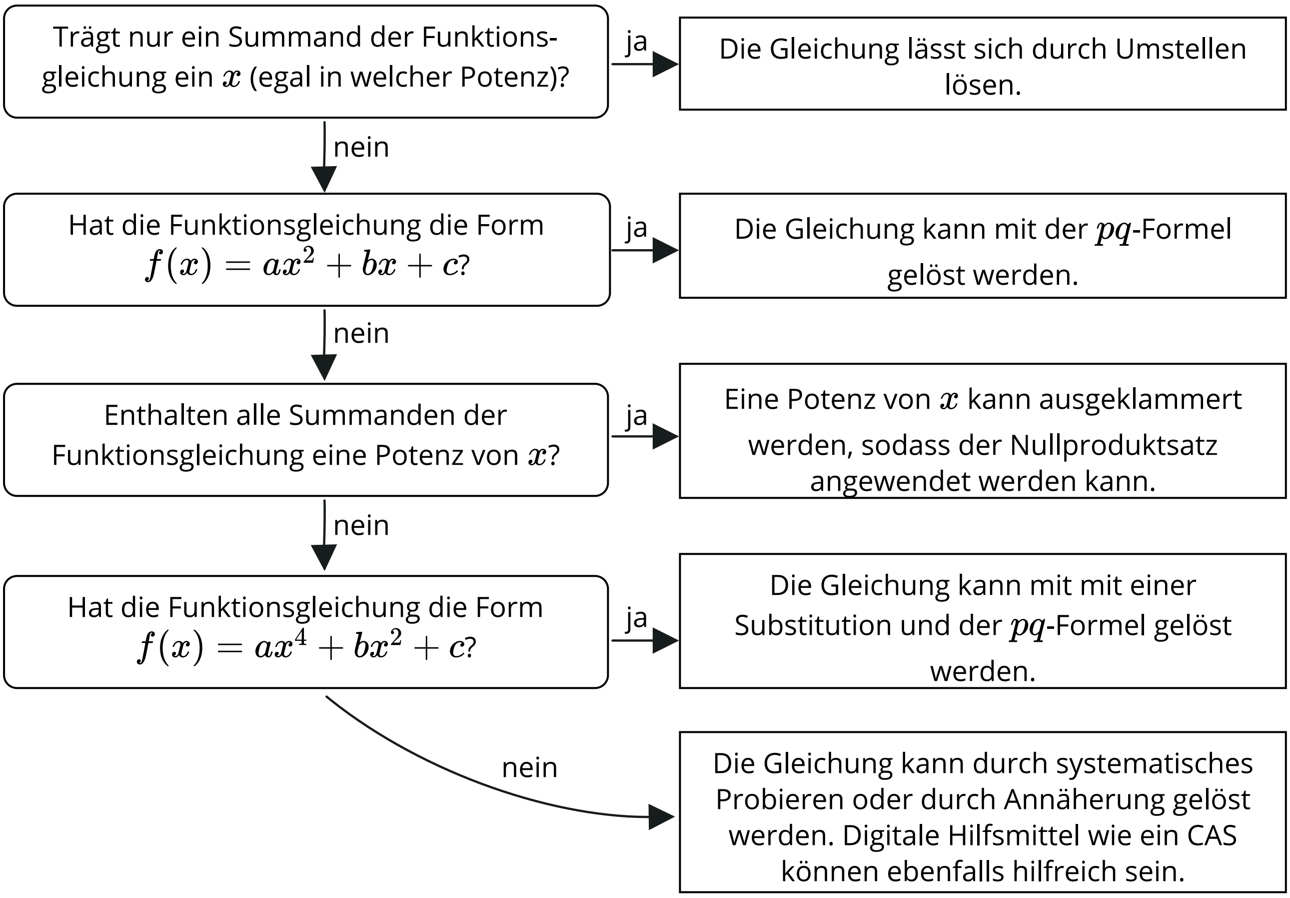
Mathematik Funktionen 11

Wie werden Nullstellen berechnet?

Der erste Schritt beim Bestimmen von Nullstellen ist immer gleich. Die Funktion wird Null gesetzt:

$f(x) = 0$

So entsteht eine Gleichung, die gelöst werden muss. Die Wahl des Lösungsverfahrens hängt dabei von der Beschaffenheit der Funktionsgleichung ab.



Gleichungen durch Umstellen lösen

④ Bestimme die Nullstellen.

a) $f(x) = 2x + 3$ b) $f(x) = x^3 - 8$

Beispiel

$f(x) = x^4 - 16$

$f(x) = 0$

$x^4 - 16 = 0 \quad | + 16$

$x^4 = 16$

$x_1 = 2; x_2 =$ -2

Gleichungen mit der pq-Formel lösen

⑤ Bestimme die Nullstellen.

a) $f(x) = x^2 + x - 2$ b) $f(x) = 0{,}5x^2 + x - 4$

Beispiel

$f(x) = 2x^2 - 10x + 12$

$f(x) = 0$

$2x^2 - 10x + 12 = 0 \quad | : 2$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$p = \text{-}5; q = 6$

$x_{1,2} = \text{-}\frac{\text{-}5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\text{-}5}{2}\right)^2 - 6}$

$x_1 = 2; x_2 = 3$

Ausklammern beim Lösen von Gleichungen

Nullproduktsatz
Ein Produkt ist immer dann 0, wenn mindestens einer der Faktoren 0 ist.

⑥ Bestimme die Nullstellen.

a) $f(x) = 2x^2 + x$ b) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2$

Beispiel

$f(x) = x^4 - 4x^2$

$f(x) = 0$

$0 = x^4 - 4x^2$

$0 = x^2 \cdot (x^2 - 4)$

$x^2 = 0$ oder $x^2 - 4 = 0$

$x_1 = 0; x_2 = 2; x_3 = \text{-}2$

Durch die Anwendung des Nullproduktsatzes entstehen neue Gleichungen, für die wieder geprüft werden muss, welches Lösungsverfahren geeignet ist.

INPUT: Nullstellen berechnen

Mathematik Funktionen 11

Lösen von biquadratischen Gleichungen mithilfe der Substitution

Gleichungen der Form $0 = ax^4 + bx^2 + c$ werden als biquadratische Gleichungen bezeichnet. Sie ähneln im Aufbau quadratischen Gleichungen. Um sie mithilfe der pq-Formel lösen zu können, wird eine Substitution (von lat. *substituere* «ersetzen») durchgeführt.

⑦ Sieh dir die Beispielaufgabe genau an und beschreibe die Schritte, die bei der Lösung der Aufgabe gemacht werden.

Beispielaufgabe
Untersuche die Funktion $f(x) = x^4 - 7x^2 - 18$ auf Nullstellen.

Lösung

(1) $f(x) = 0$

$O = x^4 - 7x^2 - 18$

(2) Substitution: $x^2 = z$

(3) $0 = z^2 - 7z - 18$

$p =$ -7; $q =$ -18

$z_{1,2} = -\frac{-7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-7}{2}\right)^2 - (-18)}$

$z_1 = 9$; $z_2 =$ -2

(4) Rücksubstitution: $z = x^2$

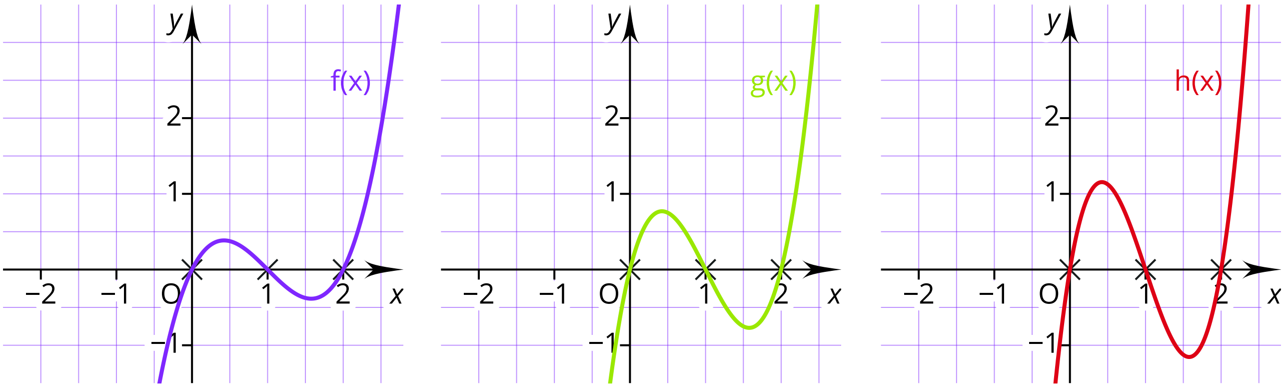
(5) $x^2 = 9$ oder $x^2 =$ -2

$x_1 = 3$; $x_2 =$ -3

⑧ Bestimme die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$.

Bestimmen von Nullstellen mithilfe digitaler Hilfsmittel
Neben den verschiedenen Methoden zum Lösen von Gleichungen per Hand (gegebenenfalls unter Zuhilfenahme eines Taschenrechners), lassen sich Nullstellen auch mithilfe digitaler Hilfsmittel wie einem Computeralgebrasystem (CAS) bestimmen. Die Befehle unterscheiden sich dabei in Abhängigkeit vom Gerät und können der Anleitung entnommen werden.

Wie lässt sich von den Nullstellen einer Funktion auf ihre Funktionsgleichungen schließen?
Die Abbildungen zeigen die drei Funktionen $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, $g(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4x$ und $h(x) = 3x^3 - 9x^2 + 6x$.



⑨ Beschreibe, welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede die Graphen haben. Es kann dazu hilfreich sein, die Funktionsgleichungen miteinander zu vergleichen.

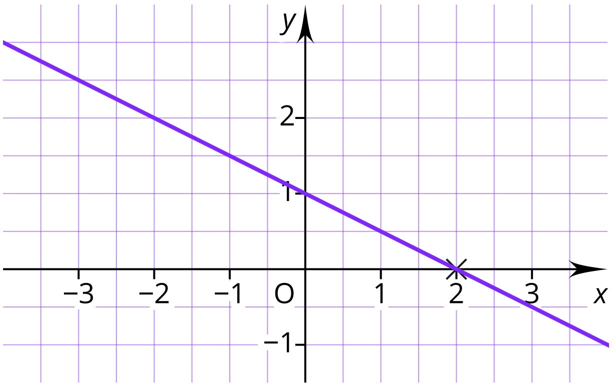
Die Funktionsgleichung von $f(x)$ lässt sich auch in der Form $f(x) = x \cdot (x-1) \cdot (x-2)$ schreiben. Diese Darstellungsform wird als Linearfaktordarstellung bezeichnet. Dabei wird eine Umkehrung des Nullproduktsatzes genutzt. Aus den Nullstellen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 2$ folgen die Linearfaktoren $(x-0)$, $(x-1)$ und $(x-2)$. Das Produkt der Linearfaktoren entspricht der Funktionsgleichung $f(x) = x \cdot (x-1) \cdot (x-2)$, wobei die Klammer $(x-0)$ zu x vereinfacht wird.
Ausmultiplizieren der Linearfaktoren führt zur Funktionsgleichung in der Normalform:
$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$
Wird der Graph der Funktion mit einem Faktor gestreckt, ändern sich die Nullstellen nicht. Die Funktion $g(x)$ ließe sich ebenfalls mit Linearfaktoren darstellen:
$g(x) = 2 \cdot x \cdot (x-1) \cdot (x-2)$

⑩ Gib die Funktionsgleichung von $h(x)$ in der Linearfaktordarstellung an.

Allgemein lässt sich die Funktionsgleichung der Funktion $f(x)$ mit den Nullstellen x_1, x_2; ... x_n und dem Streckfaktor a mithilfe der Linearfaktordarstellung angeben:
$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot ... \cdot (x - x_n)$

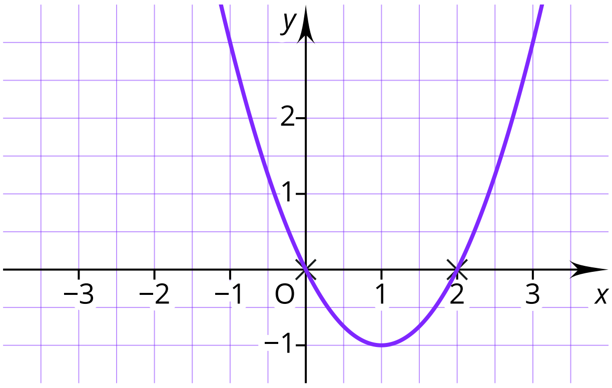
Lösung

① a)



b) Die Nullstelle der linearen Funktion ist $x = 2$. Der Schnittpunkt mit der x-Achse ist $N(2|0)$.

② a)



b) Die quadratische Funktion schneidet die x-Achse in den Punkten $N_1(0|0)$ und $N_2(2|0)$. Ihre Nullstellen sind $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$.

③ a) (4) Die konstante Funktion hat keine Nullstellen.
b) (3) Eine lineare Funktion hat immer genau eine Nullstelle.
c) (1) Diese quadratische Funktion hat keine Nullstellen.
d) (2) Diese Funktion vierten Grades hat drei Nullstellen. Würde sie ein Stück nach oben verschoben werden, hätte sie 4 Nullstellen.

④ a) $f(x) = 2x + 3$
$f(x) = 0$
$2x + 3 = 0 \quad | - 3$
$2x = \text{-}3 \quad | : 2$
$x = \text{-}1{,}5$

b) $f(x) = x^3 - 8$
$f(x) = 0$
$x^3 - 8 = 0 \quad | + 8$
$x^3 = 8 \quad |\sqrt[3]{\ }$
$x = 2$

⑤ a) $f(x) = x^2 + x - 2$
$f(x) = 0$
$x^2 + x - 2 = 0$
$p = 1; q = \text{-}2$
$x_{1,2} = \text{-}\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (\text{-}2)}$
$x_1 = 1; x_2 = \text{-}2$

b) $f(x) = 0{,}5x^2 + x - 4$
$f(x) = 0$
$0{,}5x^2 + x - 4 = 0 \quad | \cdot 2$
$x^2 + 2x - 8 = 0$
$p = 2; q = \text{-}8$
$x_{1,2} = \text{-}\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (\text{-}8)}$
$x_1 = 2; x_2 = \text{-}4$

⑥ a) $f(x) = 2x^2 + x$

$f(x) = 0$

$2x^2 + x = 0$

$x \cdot (2x + 1) = 0$

$x = 0$ oder $2x + 1 = 0$

$x_1 = 0; x_2 =$ -0,5

b) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2$

$f(x) = 0$

$x^4 + 2x^3 + 4x^2 = 0$

$x^2 \cdot (x^2 + 2x + 4) = 0$

$x^2 = 0$ oder $x^2 + 2x + 4 = 0$

$x_1 = 0$ $\quad p = 2; q = 4$

$x_{2,3} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - 4}$

$x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{-3}$

$x = 0$

⑦ (1) Zum Bestimmen der Nullstellen wird die Funktion Null gesetzt.
(2) x^2 wird durch die Variable z ersetzt. Dadurch wird auch x^4 zu z^2.

(3) Es entsteht eine Gleichung, die mithilfe der pq-Formel gelöst werden kann. Es ergeben sich zwei mögliche Lösungen für z.

(4) z wird wieder durch x^2 ersetzt.

(5) Es entstehen zwei Gleichungen, die nach x aufgelöst werden. Die erste Gleichung hat zwei Lösungen, die zweite ist hingegen nicht lösbar, da aus einer negativen Zahl nicht die Wurzel gezogen werden kann. Die Funktion hat somit nur zwei Nullstellen.

⑧ $f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$

$f(x) = 0$

$O = x^4 - 13x^2 + 36$

Substitution: $x^2 = z$

$0 = z^2 - 13z + 36$

$p = -13; q = 36$

$z_{1,2} = -\frac{-13}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-13}{2}\right)^2 - 36}$

$z_1 = 9; z_2 = 4$

Rücksubstitution: $z = x^2$

$x^2 = 9$ oder $x^2 = 4$

$x_1 = 3; x_2 = -3; x_3 = 2; x_4 = -2$

⑨ Die drei Funktionen haben alle die gleichen Nullstellen.
Es gilt: $g(x) = 2 \cdot f(x)$ und $h(x) = 3 \cdot f(x)$.

Die Graphen der Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ wurden also im Vergleich zum Graphen von $f(x)$ mit dem Faktor 2 beziehungsweise 3 gestreckt.

⑩ $h(x) = 3 \cdot x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2)$