

Wofür werden periodische Funktionen benötigt?



Die Position einer Gondel in einem Riesenrad lässt sich mit einer Sinusfunktion beschreiben.

Mit der Sinusfunktion können periodische Vorgänge beschrieben werden. Zu ihnen zählen die Bewegung des Wassers bei Ebbe und Flut oder die Position einer Gondel in einem Riesenrad. Bei einigen Funktionen muss dabei etwas zur Vereinfachung vernachlässigt werden. So ist der höchste Wasserstand bei Ebbe und Flut nicht immer gleich. Um vorherzusagen, wann das Wasser das nächste Mal einen Höchststand erreicht, reichen mathematische Modelle aber in der Regel aus.

Wie lässt sich ein periodischer Vorgang mithilfe einer periodischen Funktion beschreiben?

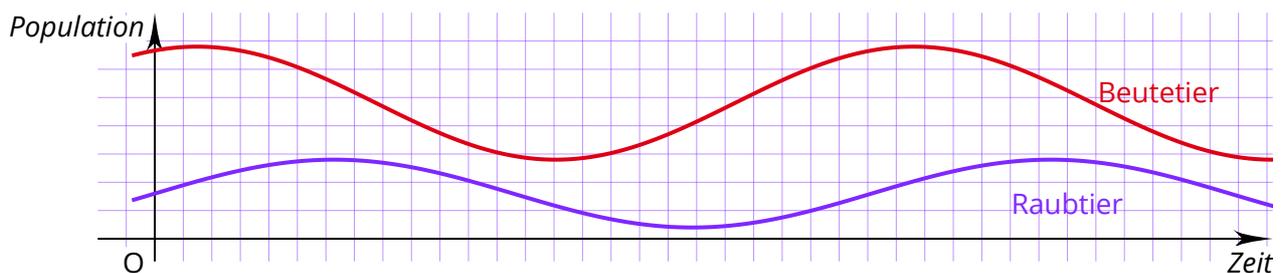
Um einen Vorgang mithilfe einer Sinusfunktion beschreiben zu können, müssen wichtige Kenndaten des Vorgangs bekannt sein. Zu ihnen zählen die Ruhelage, die Amplitude und die Periodenlänge. Um die Phasenverschiebung zu bestimmen, muss ein Zustand zum Zeitpunkt 0 festgelegt werden. Dieser kann oft frei gewählt werden. Dabei kann es sinnvoll sein, die Ruhelage oder einen Extrempunkt zu wählen. Manchmal wird die Phasenverschiebung aber auch vorgegeben wie bei der Darstellung der Gezeiten, bei der zu einer bestimmten Uhrzeit Hochwasser ist.



Beim Schaukeln könnte zum Beispiel der höchste Punkt als Startpunkt gewählt werden.

In welchen Bereichen gibt es periodische Vorgänge?

Beispiele für periodische Vorgänge gibt es in vielen Bereichen. So können wirtschaftliche Prozesse ebenso wie der Sonnenstand im Laufe eines Tages oder Schwingungen von Tönen in der Musik mit periodischen Funktionen beschrieben werden. Die Abbildung zeigt ein Beispiel aus der Biologie: Die Räuber-Beute-Beziehung.



Wenn viele Beutetiere wie Hasen vorhanden sind, steigt die Anzahl der Raubtiere wie Füchse. Die größere Fuchspopulation sorgt dann für eine Verkleinerung der Hasenpopulation.

Sinus oder Kosinus?

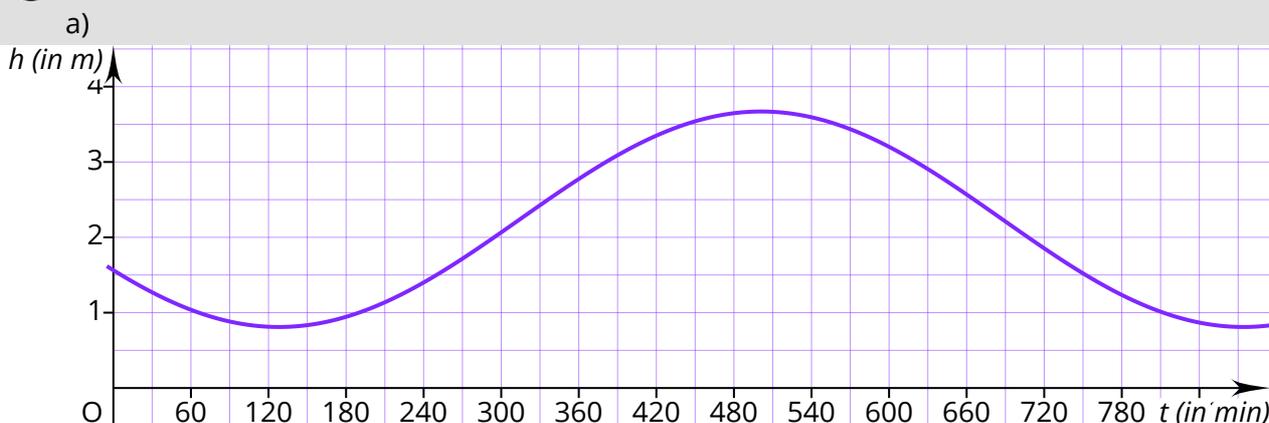
Die Kosinusfunktion eignet sich ebenso wie die Sinusfunktion zum Darstellen periodischer Vorgänge. Es ist eher üblich, die Sinusfunktion zu benutzen, um periodische Vorgänge zu beschreiben. Es ist aber nicht falsch, eine Kosinusfunktion zu verwenden.

Beispielaufgabe

Aus einer Tabelle zur Gezeitenvorausberechnung kann entnommen werden, dass das erste Niedrigwasser des Jahres am 1. Januar um 02:08 h erreicht werden wird. Der Wasserstand für das Niedrigwasser wurde mit 0,81 m über Seekartennull vorhergesagt, für das nächste Hochwasser ist die Prognose 3,67 m. Das nächste Niedrigwasser ist für 14:34 h angesagt.

- Veranschauliche die Wasserbewegung mithilfe einer Grafik.
- Ermittle eine Funktionsgleichung, mit der die Höhe des Wasserstandes in Abhängigkeit von der Zeit bestimmt werden kann.
- Ermittle die Länge des Zeitintervalls, in dem der Wasserstand am 1. Januar mindestens 3 m über Seekartennull liegt.

Lösung



b) Der Wasserstand soll mit der Funktion $h(t) = a \cdot \sin [b(t + c)] + d$ beschrieben werden, wobei $h(t)$ die Höhe des Wassers über Seekartennull in Metern angibt und t die Zeit in Minuten.

Um a und d zu bestimmen, werden die Wasserstände genauer betrachtet. Bei ihnen handelt es sich um den höchsten und den niedrigsten Wert, den das Wasser erreicht. Die Ruhelage d ist der Mittelwert der beiden Werte:

$$d = \frac{3,67 + 0,81}{2} = 2,24$$

Die Amplitude a ist der Abstand der Ruhelage zu einem der Extrempunkte:

$$a = 3,67 - 2,24 = 1,43$$

Um b zu bestimmen, wird die Periodenlänge benötigt. Dazu wird 00:00 h des Tages als $t = 0$ festgelegt und die beiden Zeiten mit Niedrigwasser in Minuten umgerechnet:

$$02:08 \text{ h} = 2 \text{ h } 8 \text{ min} = 128 \text{ min} \text{ und } 14:34 = 14 \text{ h } 34 \text{ min} = 874 \text{ min}$$

Der Zeitraum zwischen Hochwasser und Niedrigwasser ist: $T = 874 - 128 = 746$

$$b = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{746} = \frac{\pi}{373}$$

 Lösung

Fortsetzung von b)

Um c zu bestimmen, muss ein positiver Durchgang durch die Ruhelage gesucht werden. Dieser lässt sich mithilfe der Zeiten zweier aufeinander folgender Niedrigwasser bestimmen. Das nächste Hochwasser liegt in der Mitte zwischen den Zeiten der Niedrigwasser:

$$t_{\text{Hochwasser}} = \frac{128 + 874}{2} = 501$$

Der positive Durchgang liegt in der Mitte zwischen dem Niedrigwasser und dem Hochwasser:

$$t_{\text{positiver Durchgang}} = \frac{128 + 501}{2} = 314,5$$

Daraus ergibt sich c , wobei der Vorzeichenwechsel beachtet werden muss:

$$c = -314,5$$

Als Funktionsgleichung ergibt sich dann:

$$h(t) = 1,43 \cdot \sin \left[\frac{\pi}{373} (t - 314,5) \right] + 2,24$$

c) Gesucht ist der Bereich, in dem die Funktionswerte mindestens bei 3 liegen.

$$h(t) = 3$$

$$3 = 1,43 \cdot \sin \left[\frac{\pi}{373} (t - 314,5) \right] + 2,24 \quad | - 2,24$$

$$0,76 = 1,43 \cdot \sin \left[\frac{\pi}{373} (t - 314,5) \right] \quad | : 1,43$$

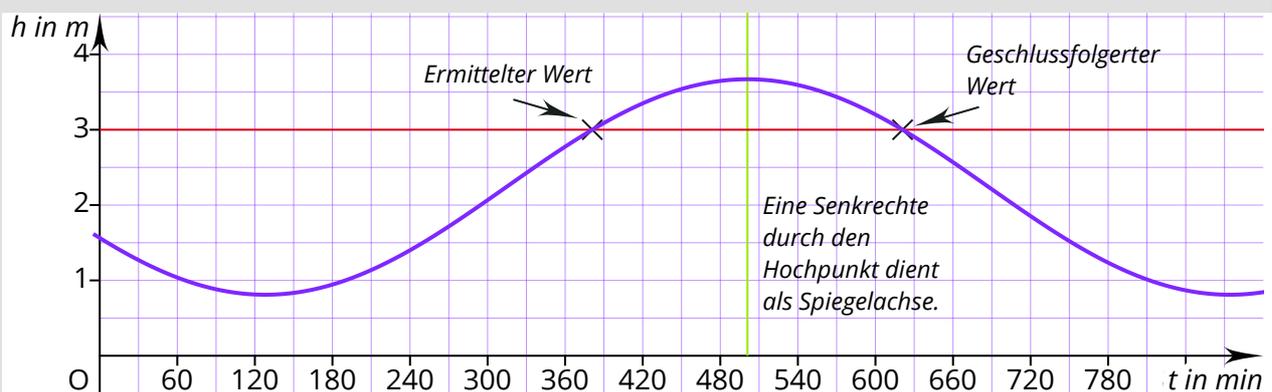
$$0,53 \approx \sin \left[\frac{\pi}{373} (t - 314,5) \right] \quad | \sin^{-1}$$

$$0,56 \approx \frac{\pi}{373} (t - 314,5) \quad | : \frac{\pi}{373}$$

$$66,53 \approx t - 314,5 \quad | + 314,5$$

$$381,03 \approx t$$

Die Rechnung liefert erstmal nur ein Ergebnis. Dabei gibt es unendlich viele t -Werte, für die $h(t) = 3$ gilt. Weitere Werte lassen sich mithilfe von Symmetrieüberlegungen erschließen.



Aus dem Abstand von t zu $t_{\text{Hochwasser}}$ lässt sich die Länge des Intervalls bestimmen:

$$2 \cdot (t_{\text{Hochwasser}} - t) = 2 \cdot (501 - 381,03) = 239,94$$

Der Wasserstand liegt 239,94 min (knapp 4 Stunden) bei mindestens 3 m über Seekartennull.