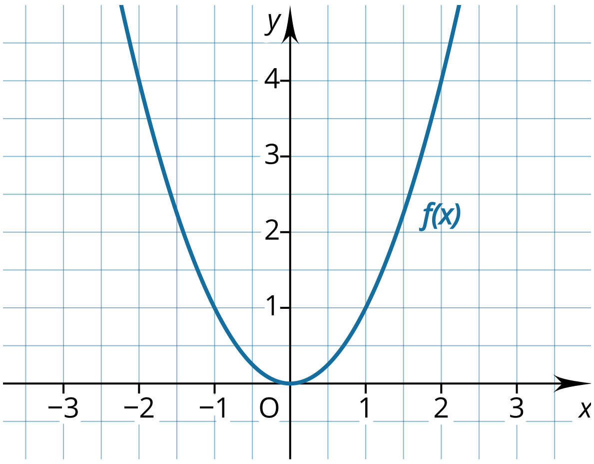
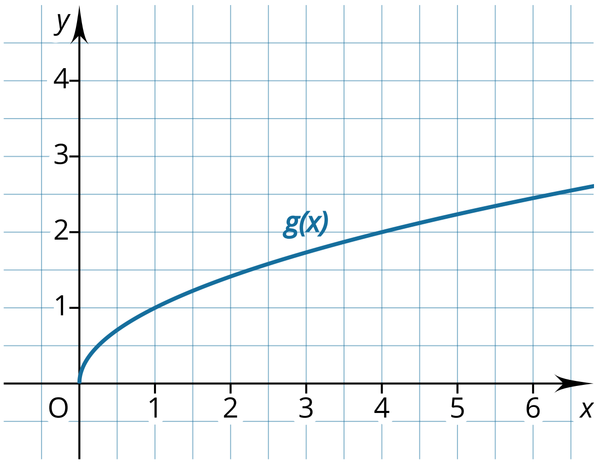
① Die Abbildungen zeigen die ganzrationale Funktion $f(x) = x^2$ und die Wurzelfunktion $g(x) = \sqrt{x}$.

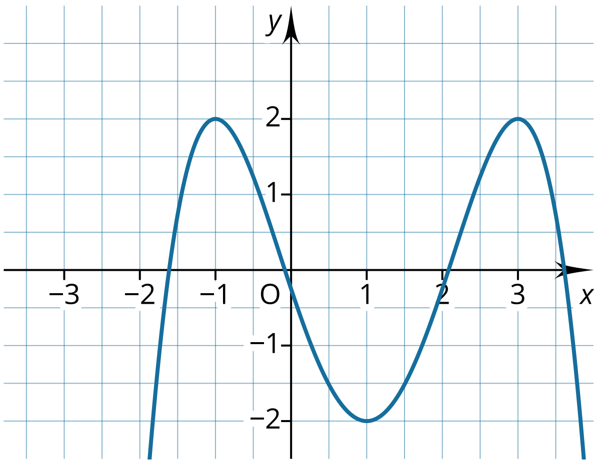




a) Erläutere, warum es sich in beiden Fällen um Funktionen handelt.
b) Gib die Definitonsmenge und die Wertemenge für beide Funktionen an.
c) Beschreibe das Monotonieverhalten beider Funktionen.

② Gegeben ist die ganzrationale Funktion $f(x) = 2x^4 - 2x^2 - 24$.
a) Gib den Grad der Funktion an.
b) Untersuche die Funktion auf Nullstellen.

③ Gegeben ist der Graph einer ganzrationalen Funktion. Begründe, warum es sich nicht um den Graphen einer der folgenden Funktionen handeln kann. Es genügt jeweils ein Ausschlusskriterium.
a) $f(x) = -x^4 + 0{,}5x^2 - 0{,}25$
b) $g(x) = 0{,}5x^4 + x^2 + 3x - 0{,}25$
c) $h(x) = -0{,}25(x+2)(x+1)(x^2-4)$



④ Erkläre mithilfe des Verhaltens im Unendlichen, warum eine Funktion ersten oder dritten Grades immer mindestens eine Nullstelle haben muss, wohingegen eine Funktion zweiten Grades nicht unbedingt eine Nullstelle haben muss.

⑤ Über den Graphen einer Funktion $f(x)$ ist bekannt, dass er achsensymmetrisch zur y-Achse ist. Untersuche den Graphen der Funktion $g(x)$ auf Symmetrie.
a) $g(x) = f(x) + a$ mit $a \in \mathbb{R}$
b) $g(x) = a \cdot f(x+b)$ mit $a; b \in \mathbb{R}\backslash 0$

Musterlösung

Hinweis: Es handelt sich um Beispiellösungen. Teilweise sind alternative Rechenwege möglich.

①

a) Eine Funktion ordnet einer Zahl x einen eindeutigen Funktionswert zu. Da in beiden Graphen keine Stelle vorhanden ist, an der eine vertikale Linie die Funktion zweimal schneiden würde, handelt es sich um Funktionen.

b)

Funktion	$f(x) = x^2$	$g(x) = \sqrt{x}$
Definitionsmenge	$D = \mathbb{R}$	$D = \{x \vert x \geq 0\}$
Wertemenge	$W = \{x \vert x \geq 0\}$	$W = \{x \vert x \geq 0\}$

c) Für $x < 0$ ist $f(x)$ streng monoton fallend und für $x > 0$ ist $f(x)$ streng monoton steigend. Für $x \geq 0$ ist $g(x)$ streng monoton steigend.

② a) Es handelt sich um eine Funktion vierten Grades.

b) $f(x) = 2x^4 - 2x^2 - 24$

$f(x) = 0$

$0 = 2x^4 - 2x^2 - 24$

Substitution: $x^2 = z$

$0 = 2z^2 - 2z - 24 \quad | : 2$

$0 = z^2 - z - 12$

$p = -1; q = -12$

$z_{1,2} = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - (-12)}$

$z_1 = -3; z_2 = 4$

Rücksubstitution: $z = x^2$

$x^2 = -3$ oder $x^2 = 4$

$x_1 = 2; x_2 = -2$

③

a) Die Funktion $f(x)$ ist im Vergleich zur dargestellten Funktion achsensymmetrisch, da es in der Funktion nur gerade Exponenten gibt.

b) Die Funktion $g(x)$ zeigt ein anderes Verhalten im Unendlichen. Während die dargestellte Funktion für x gegen ∞ gegen $-\infty$ strebt, strebt die Funktion $g(x)$ gegen $+\infty$.

c) Die Funktion $h(x)$ ist in der Linearfaktordarstellung angegeben, sodass sich ablesen lässt, dass $h(x)$ bei $x = -2$ eine Nullstelle hat. Die dargestellte Funktion hat dort keine Nullstelle.

④
Funktionen zweiten Grades zeigen beim Verhalten im Unendlichen für positive und negative Werte das gleiche Verhalten. So gilt zum Beispiel für die Normalparabel $f(x) = x^2$:

Für $x \to +\infty$ gilt $f(x) \to +\infty$.

Für $x \to$ -∞ gilt $f(x) \to +\infty$.

Wenn die Normalparabel an der x-Achse gespiegelt wird, entsteht die Funktion $g(x) =$ -x^2.

Dann gilt:

Für $x \to +\infty$ gilt $f(x) \to$ -∞.

Für $x \to$ -∞ gilt $f(x) \to$ -∞.

Die Normalparabel hat eine Nullstelle. Wird sie nach oben verschoben, hat sie keine mehr.
Bei Funktionen ersten und dritten Grades ist das anders. Je nachdem, ob der Koeffizient vor dem x mit dem höchsten Exponenten positiv oder negativ ist, liegt einer der beiden folgenden Fälle vor:

Für $x \to +\infty$ gilt $f(x) \to +\infty$.

Für $x \to$ -∞ gilt $f(x) \to$ -∞.

oder

Für $x \to +\infty$ gilt $f(x) \to$ -∞.

Für $x \to$ -∞ gilt $f(x) \to +\infty$.

Anders formuliert: Die Funktion kommt entweder von unten und geht nach oben oder kommt von oben und geht nach unten. In beiden Fällen muss sie dabei mindestens einmal die x-Achse kreuzen, sodass es mindestens eine Nullstelle gibt.

⑤
a) Die Funktion $g(x)$ ist ebenfalls achsensymmetrisch zur y-Achse, da das a nur eine Verschiebung in y-Richtung bewirkt, aber an der Symmetrie nichts ändert.

b) Die Funktion $g(x)$ ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse, da das b für eine seitliche Verschiebung sorgt und somit die Achsensymmetrie zur y-Achse aufgehoben wird. Das a sorgt für eine Streckung des Graphen. Es würde die Achsensymmetrie nicht aufheben.