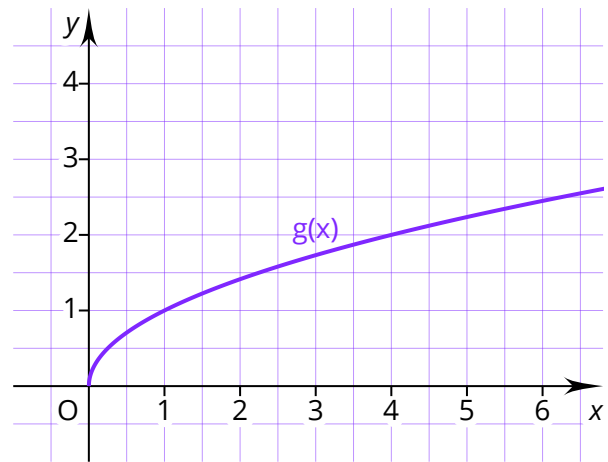
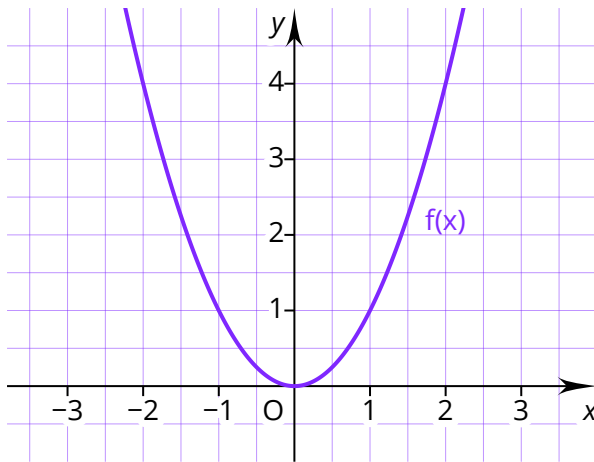


- ① Die Abbildungen zeigen die ganzrationale Funktion  $f(x) = x^2$  und die Wurzelfunktion  $g(x) = \sqrt{x}$ .



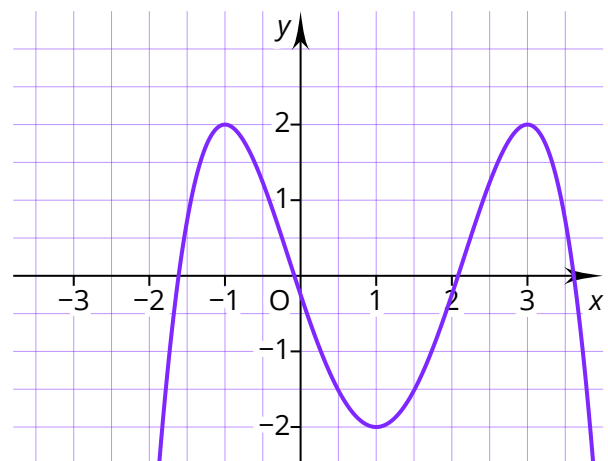
- a) Erläutere, warum es sich in beiden Fällen um Funktionen handelt.  
 b) Gib die Definitionsmenge und die Wertemenge für beide Funktionen an.  
 c) Beschreibe das Monotonieverhalten beider Funktionen.

- ② Gegeben ist die ganzrationale Funktion  $f(x) = 2x^4 - 2x^2 - 24$ .

- a) Gib den Grad der Funktion an.  
 b) Untersuche die Funktion auf Nullstellen.

- ③ Gegeben ist der Graph einer ganzrationalen Funktion. Begründe, warum es sich nicht um den Graphen einer der folgenden Funktionen handeln kann. Es genügt jeweils ein Ausschlusskriterium.

- a)  $f(x) = -x^4 + 0,5x^2 - 0,25$   
 b)  $g(x) = 0,5x^4 + x^2 + 3x - 0,25$   
 c)  $h(x) = -0,25(x+2)(x+1)(x^2-4)$



- ④ Erkläre mithilfe des Verhaltens im Unendlichen, warum eine Funktion ersten oder dritten Grades immer mindestens eine Nullstelle haben muss, wohingegen eine Funktion zweiten Grades nicht unbedingt eine Nullstelle haben muss.

- ⑤ Über den Graphen einer Funktion  $f(x)$  ist bekannt, dass er achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse ist. Untersuche den Graphen der Funktion  $g(x)$  auf Symmetrie.

- a)  $g(x) = f(x) + a$  mit  $a \in \mathbb{R}$   
 b)  $g(x) = a \cdot f(x+b)$  mit  $a; b \in \mathbb{R} \setminus 0$



## Musterlösung

*Hinweis:* Es handelt sich um Beispiellösungen. Teilweise sind alternative Rechenwege möglich.

①

a) Eine Funktion ordnet einer Zahl  $x$  einen eindeutigen Funktionswert zu. Da in beiden Graphen keine Stelle vorhanden ist, an der eine vertikale Linie die Funktion zweimal schneiden würde, handelt es sich um Funktionen.

b)

| Funktion         | $f(x) = x^2$         | $g(x) = \sqrt{x}$    |
|------------------|----------------------|----------------------|
| Definitionsmenge | $D = \mathbb{R}$     | $D = \{x x \geq 0\}$ |
| Wertemenge       | $W = \{x x \geq 0\}$ | $W = \{x x \geq 0\}$ |

c) Für  $x < 0$  ist  $f(x)$  streng monoton fallend und für  $x > 0$  ist  $f(x)$  streng monoton steigend. Für  $x \geq 0$  ist  $g(x)$  streng monoton steigend.

② a) Es handelt sich um eine Funktion vierten Grades.

b)  $f(x) = 2x^4 - 2x^2 - 24$

$$f(x) = 0$$

$$0 = 2x^4 - 2x^2 - 24$$

Substitution:  $x^2 = z$

$$0 = 2z^2 - 2z - 24 \quad | : 2$$

$$0 = z^2 - z - 12$$

$$p = -1; q = -12$$

$$z_{1,2} = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - (-12)}$$

$$z_1 = -3; z_2 = 4$$

Rücksubstitution:  $z = x^2$

$$x^2 = -3 \text{ oder } x^2 = 4$$

$$x_1 = 2; x_2 = -2$$

③

a) Die Funktion  $f(x)$  ist im Vergleich zur dargestellten Funktion achsensymmetrisch, da es in der Funktion nur gerade Exponenten gibt.

b) Die Funktion  $g(x)$  zeigt ein anderes Verhalten im Unendlichen. Während die dargestellte Funktion für  $x$  gegen  $\infty$  gegen  $-\infty$  strebt, strebt die Funktion  $g(x)$  gegen  $+\infty$ .

c) Die Funktion  $h(x)$  ist in der Linearfaktordarstellung angegeben, sodass sich ablesen lässt, dass  $h(x)$  bei  $x = -2$  eine Nullstelle hat. Die dargestellte Funktion hat dort keine Nullstelle.

④

Funktionen zweiten Grades zeigen beim Verhalten im Unendlichen für positive und negative Werte das gleiche Verhalten. So gilt zum Beispiel für die Normalparabel  $f(x) = x^2$ :

Für  $x \rightarrow +\infty$  gilt  $f(x) \rightarrow +\infty$ .

Für  $x \rightarrow -\infty$  gilt  $f(x) \rightarrow +\infty$ .

Wenn die Normalparabel an der  $x$ -Achse gespiegelt wird, entsteht die Funktion  $g(x) = -x^2$ .

Dann gilt:

Für  $x \rightarrow +\infty$  gilt  $f(x) \rightarrow -\infty$ .

Für  $x \rightarrow -\infty$  gilt  $f(x) \rightarrow -\infty$ .

Die Normalparabel hat eine Nullstelle. Wird sie nach oben verschoben, hat sie keine mehr.

Bei Funktionen ersten und dritten Grades ist das anders. Je nachdem, ob der Koeffizient vor dem  $x$  mit dem höchsten Exponenten positiv oder negativ ist, liegt einer der beiden folgenden Fälle vor:

Für  $x \rightarrow +\infty$  gilt  $f(x) \rightarrow +\infty$ .

Für  $x \rightarrow -\infty$  gilt  $f(x) \rightarrow -\infty$ .

oder

Für  $x \rightarrow +\infty$  gilt  $f(x) \rightarrow -\infty$ .

Für  $x \rightarrow -\infty$  gilt  $f(x) \rightarrow +\infty$ .

Anders formuliert: Die Funktion kommt entweder von unten und geht nach oben oder kommt von oben und geht nach unten. In beiden Fällen muss sie dabei mindestens einmal die  $x$ -Achse kreuzen, sodass es mindestens eine Nullstelle gibt.

⑤

a) Die Funktion  $g(x)$  ist ebenfalls achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse, da das  $a$  nur eine Verschiebung in  $y$ -Richtung bewirkt, aber an der Symmetrie nichts ändert.

b) Die Funktion  $g(x)$  ist nicht achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse, da das  $b$  für eine seitliche Verschiebung sorgt und somit die Achsensymmetrie zur  $y$ -Achse aufgehoben wird. Das  $a$  sorgt für eine Streckung des Graphen. Es würde die Achsensymmetrie nicht aufheben.