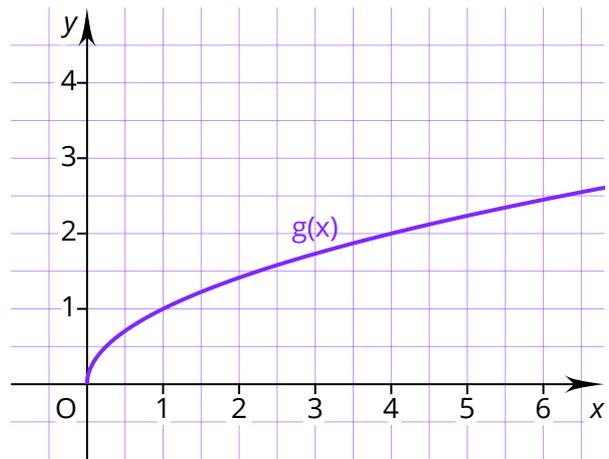
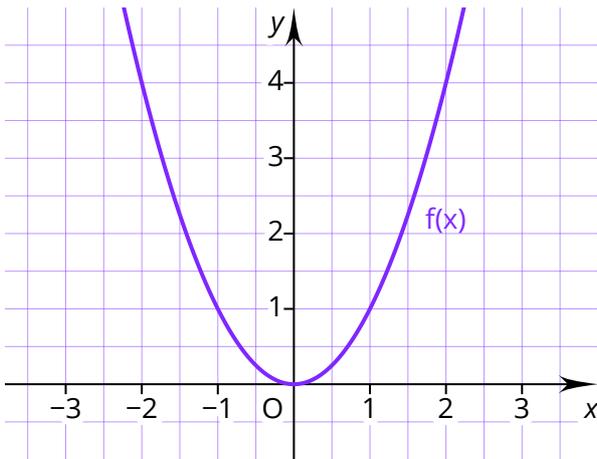
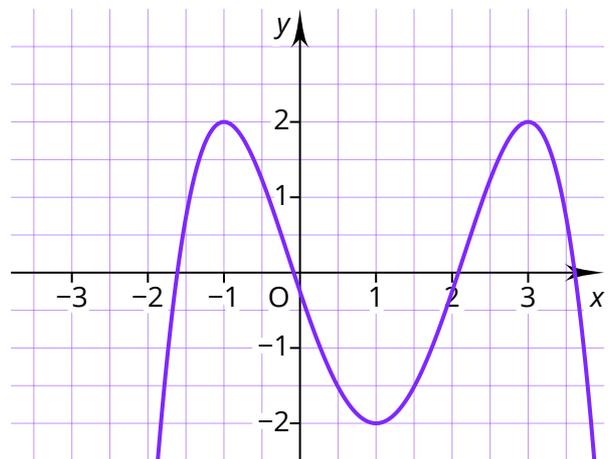


- ① Die Abbildungen zeigen die ganzrationale Funktion $f(x) = x^2$ und die Wurzelfunktion $g(x) = \sqrt{x}$.



- a) Erläutere, warum es sich in beiden Fällen um Funktionen handelt.
 b) Gib die Definitionsmenge und die Wertemenge für beide Funktionen an.
 c) Beschreibe das Monotonieverhalten beider Funktionen.
- ② Gegeben ist die ganzrationale Funktion $f(x) = 2x^4 - 2x^2 - 24$.
- a) Gib den Grad der Funktion an.
 b) Untersuche die Funktion auf Nullstellen.

- ③ Gegeben ist der Graph einer ganzrationalen Funktion. Begründe, warum es sich nicht um den Graphen einer der folgenden Funktionen handeln kann. Es genügt jeweils ein Ausschlusskriterium.
- a) $f(x) = -x^4 + 0,5x^2 - 0,25$
 b) $g(x) = 0,5x^4 + x^2 + 3x - 0,25$
 c) $h(x) = -0,25(x+2)(x+1)(x^2-4)$



- ④ Erkläre mithilfe des Verhaltens im Unendlichen, warum eine Funktion ersten oder dritten Grades immer mindestens eine Nullstelle haben muss, wohingegen eine Funktion zweiten Grades nicht unbedingt eine Nullstelle haben muss.
- ⑤ Über den Graphen einer Funktion $f(x)$ ist bekannt, dass er achsensymmetrisch zur y -Achse ist. Untersuche den Graphen der Funktion $g(x)$ auf Symmetrie.
- a) $g(x) = f(x) + a$ mit $a \in \mathbb{R}$
 b) $g(x) = a \cdot f(x + b)$ mit $a; b \in \mathbb{R} \setminus 0$

Musterlösung

Hinweis: Es handelt sich um Beispiellösungen. Teilweise sind alternative Rechenwege möglich.

①

a) Eine Funktion ordnet einer Zahl x einen eindeutigen Funktionswert zu. Da in beiden Graphen keine Stelle vorhanden ist, an der eine vertikale Linie die Funktion zweimal schneiden würde, handelt es sich um Funktionen.

b)

Funktion	$f(x) = x^2$	$g(x) = \sqrt{x}$
Definitionsmenge	$D = \mathbb{R}$	$D = \{x x \geq 0\}$
Wertemenge	$W = \{x x \geq 0\}$	$W = \{x x \geq 0\}$

c) Für $x < 0$ ist $f(x)$ streng monoton fallend und für $x > 0$ ist $f(x)$ streng monoton steigend. Für $x \geq 0$ ist $g(x)$ streng monoton steigend.

② a) Es handelt sich um eine Funktion vierten Grades.

b) $f(x) = 2x^4 - 2x^2 - 24$

$$f(x) = 0$$

$$0 = 2x^4 - 2x^2 - 24$$

Substitution: $x^2 = z$

$$0 = 2z^2 - 2z - 24 \quad | : 2$$

$$0 = z^2 - z - 12$$

$$p = -1; q = -12$$

$$z_{1,2} = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - (-12)}$$

$$z_1 = -3; z_2 = 4$$

Rücksubstitution: $z = x^2$

$$x^2 = -3 \text{ oder } x^2 = 4$$

$$x_1 = 2; x_2 = -2$$

③

a) Die Funktion $f(x)$ ist im Vergleich zur dargestellten Funktion achsensymmetrisch, da es in der Funktion nur gerade Exponenten gibt.

b) Die Funktion $g(x)$ zeigt ein anderes Verhalten im Unendlichen. Während die dargestellte Funktion für x gegen ∞ gegen $-\infty$ strebt, strebt die Funktion $g(x)$ gegen $+\infty$.

c) Die Funktion $h(x)$ ist in der Linearfaktordarstellung angegeben, sodass sich ablesen lässt, dass $h(x)$ bei $x = -2$ eine Nullstelle hat. Die dargestellte Funktion hat dort keine Nullstelle.

④

Funktionen zweiten Grades zeigen beim Verhalten im Unendlichen für positive und negative Werte das gleiche Verhalten. So gilt zum Beispiel für die Normalparabel $f(x) = x^2$:

Für $x \rightarrow +\infty$ gilt $f(x) \rightarrow +\infty$.

Für $x \rightarrow -\infty$ gilt $f(x) \rightarrow +\infty$.

Wenn die Normalparabel an der x -Achse gespiegelt wird, entsteht die Funktion $g(x) = -x^2$.

Dann gilt:

Für $x \rightarrow +\infty$ gilt $f(x) \rightarrow -\infty$.

Für $x \rightarrow -\infty$ gilt $f(x) \rightarrow -\infty$.

Die Normalparabel hat eine Nullstelle. Wird sie nach oben verschoben, hat sie keine mehr. Bei Funktionen ersten und dritten Grades ist das anders. Je nachdem, ob der Koeffizient vor dem x mit dem höchsten Exponenten positiv oder negativ ist, liegt einer der beiden folgenden Fälle vor:

vor:

Für $x \rightarrow +\infty$ gilt $f(x) \rightarrow +\infty$.

Für $x \rightarrow -\infty$ gilt $f(x) \rightarrow -\infty$.

oder

Für $x \rightarrow +\infty$ gilt $f(x) \rightarrow -\infty$.

Für $x \rightarrow -\infty$ gilt $f(x) \rightarrow +\infty$.

Anders formuliert: Die Funktion kommt entweder von unten und geht nach oben oder kommt von oben und geht nach unten. In beiden Fällen muss sie dabei mindestens einmal die x -Achse kreuzen, sodass es mindestens eine Nullstelle gibt.

⑤

a) Die Funktion $g(x)$ ist ebenfalls achsensymmetrisch zur y -Achse, da das a nur eine Verschiebung in y -Richtung bewirkt, aber an der Symmetrie nichts ändert.

b) Die Funktion $g(x)$ ist nicht achsensymmetrisch zur y -Achse, da das b für eine seitliche Verschiebung sorgt und somit die Achsensymmetrie zur y -Achse aufgehoben wird. Das a sorgt für eine Streckung des Graphen. Es würde die Achsensymmetrie nicht aufheben.