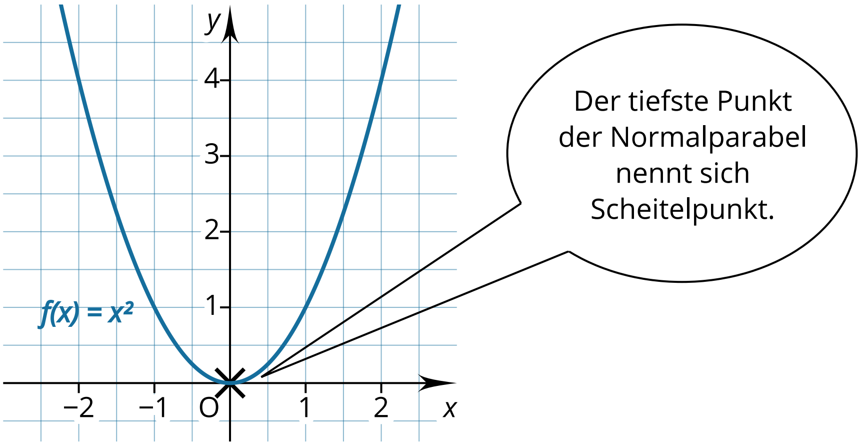
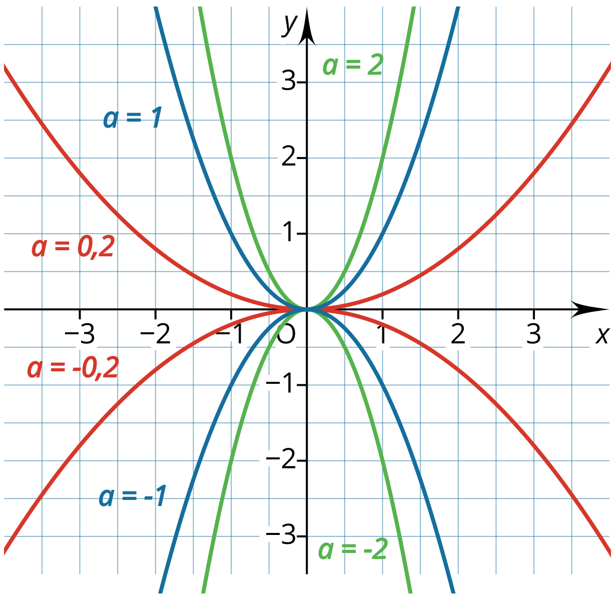
Was ist eine quadratische Funktion?
Die Funktionsgleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ gehört zu einer quadratischen Funktion, wobei $a \neq 0$ sein muss.

Wie sieht der Graph einer quadratischen Funktion aus?
Der Graph einer quadratischen Funktion ist eine Parabel. Der Graph der Funktion $f(x) = x^2$ wird als Normalparabel bezeichnet.



Welchen Einfluss hat der Koeffizient a auf die Form der Parabel?
Die Abbildung zeigt einige Graphen quadratischer Funktionen der Form $f(x) = ax^2$.



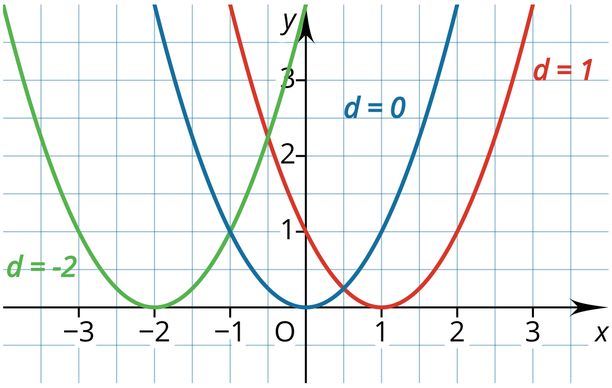
Für $a > 0$ ist die Parabel nach oben geöffnet, für $a < 0$ ist die Parabel nach unten geöffnet. Bei Parabeln, die nach unten geöffnet sind, ist der Scheitelpunkt der höchste Punkt der Parabel.
Je größer $|a|$ ist, desto schmaler wird der Graph der Parabel. Ist $|a| > 1$ wird die Parabel als gestreckt bezeichnet. Ist $0 < |a| < 1$ wird die Parabel als gestaucht bezeichnet.

INFO: Quadratische Funktionen

Mathematik Funktionen 11

Wie lässt sich eine Parabel seitlich verschieben?

Um besser zu erkennen, wie sich eine seitliche Verschiebung auswirkt, wird für die Graphen in der folgenden Abbildung die Form $f(x) = (x - d)^2$ gewählt.



Der Wert d gibt an, wie die Parabel seitlich verschoben wurde. Für $d > 0$ wird die Parabel nach rechts verschoben, für $d < 0$ wird die Parabel nach links verschoben.

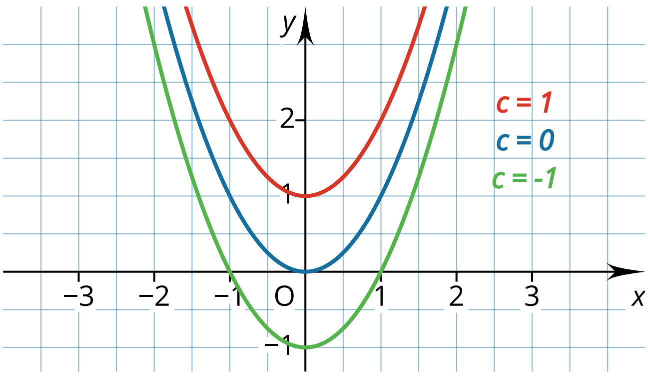
Mithilfe der binomischen Formeln lassen sich Funktionen der Form $f(x) = a(x - d)^2$ in die Normalform $f(x) = ax^2 + bx + c$ umwandeln:

$$f(x) = (x - (\text{-}2))^2 = x^2 + 4x + 4$$
$$f(x) = (x - 0)^2 = x^2$$
$$f(x) = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

Nach der Umformung ist in der Funktionsgleichung nicht mehr auf einen Blick zu erkennen, wie die Parabel seitlich verschoben ist. Daher gilt die Faustregel: Für $b \neq 0$ ist eine Parabel seitlich verschoben. Um die genaue Lage des Scheitelpunkts zu ermitteln, ist jedoch eine Umformung in die Form $f(x) = a(x - d)^2$ erforderlich.

Was gibt der Wert c in der Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion an?

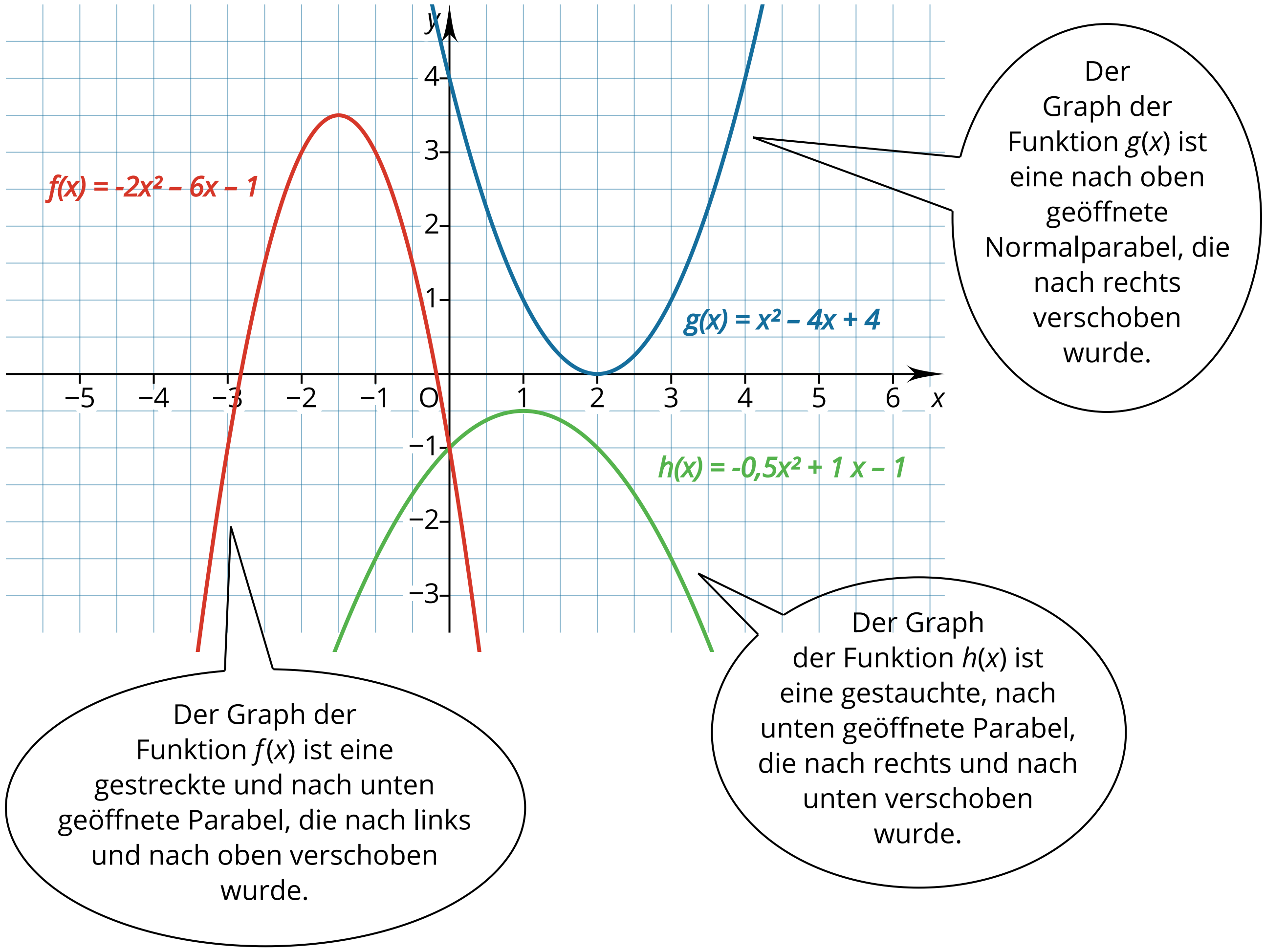
Die Abbildung zeigt einige Graphen quadratischer Funktionen der Form $f(x) = x^2 + c$.



Der Wert c gibt an, an welcher Stelle die y-Achse geschnitten wird. Eine Erhöhung von c sorgt für eine Verschiebung der Parabel nach oben. Entsprechend wird eine Parabel nach unten verschoben, wenn für c ein kleinerer Wert gewählt wird.

Wie lassen sich Parabeln beschreiben?

Um die Form einer Parabel zu beschreiben, wird angegeben, ob die Funktion verschoben ist, in welche Richtung sie geöffnet ist und ob sie getreckt oder gestaucht ist. Dabei wird die Parabel mit der Normalparabel $f(x) = x^2$ verglichen. Die Abbildung zeigt einige Beispiele für Parabeln.



Wie viele Nullstellen hat eine Parabel?

Je nachdem, wie eine Parabel im Koordinatensystem liegt, kann sie keine, eine oder zwei Nullstellen haben. Die Abbildung im vorherigen Abschnitt zeigt exemplarisch diese drei Fälle. Die Funktion $f(x)$ hat ihren Scheitelpunkt oberhalb der x-Achse und ist nach unten geöffnet. Daher schneidet sie die x-Achse an zwei Stellen. Bei $g(x)$ liegt der Scheitelpunkt hingegen auf der x-Achse. Statt Schnittpunkt lässt sich in einem solchen Fall auch Berührpunkt mit der x-Achse sagen. Die Funktion $h(x)$ hat hingegen gar keine Nullstelle.

Wie lassen sich die Nullstellen quadratischer Funktionen berechnen?
Um die Nullstellen einer Parabel zu bestimmen, wird die Funktion gleich Null gesetzt. Es entsteht eine quadratische Gleichung, die durch Umstellen, Ausklammern oder mit der pq-Formel gelöst werden kann.

pq-Formel

$$x_{1,2} = \text{-}\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Um die pq-Formel anwenden zu können, muss die quadratische Gleichung in die Form $x^2 + px + q = 0$ gebracht werden.

Beispielaufgabe
Bestimme die Nullstellen der Funktion $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$.

Rechenweg

$f(x) = 0$

$2x^2 + 4x - 6 = 0 \quad | : 2$

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$p = 2; q = \text{-}3$

$x_{1,2} = \text{-}\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (\text{-}3)}$

$x_1 = 1; x_2 = \text{-}3$

Wie lassen sich die Schnittpunkte einer quadratischen Funktion mit einer anderen Funktion berechnen?
Um die Schnittpunkte von zwei Funktionen zu bestimmen, müssen die Funktionen gleichgesetzt werden. Es entsteht eine Gleichung, die gelöst werden kann.

Beispielaufgabe
Ermittle, ob die Funktionen $f(x) = x^2 + 2x + 1$ und $g(x) = \text{-}2x - 3$ sich schneiden und gib gegebenenfalls die Schnittpunkte an.

Rechenweg

$f(x) = g(x)$

$x^2 + 2x + 1 = \text{-}2x - 3 \quad | + 2x + 3$

$x^2 + 4x + 4 = 0$

$p = 4; q = 4$

$x_{1,2} = \text{-}\frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 4}$

$x = \text{-}2$

$g(\text{-}2) = 1$

Die Funktionen berühren sich im Punkt $S(\text{-}2|1)$.