INFO: Sonderfälle beim Lösen eines LGS

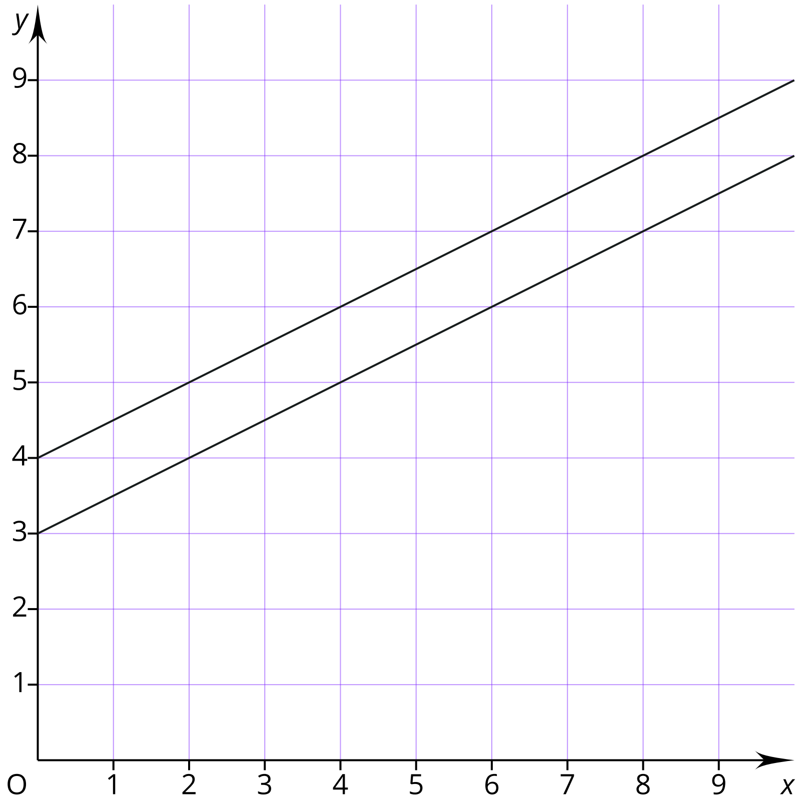
Mathematik Gleichungen

LGS mit keiner Lösung

Die folgenden Funktionen gehören zu einem LGS:

I. $y = 0{,}5x + 3$
II. $y = 0{,}5x + 4$

Die Funktionen werden in ein Koordinatensystem eingezeichnet:



In der Zeichnung ist erkennbar, dass die beiden linearen Funktionen parallel verlaufen. Sie haben somit keinen Schnittpunkt. Das Gleichungssystem hat keine Lösung. Das wird durch eine leere Lösungsmenge verdeutlicht:

$L = \{\ \}$

Dieses Ergebnis lässt sich auch rechnerisch zeigen. Beim Gleichsetzungsverfahren werden die Funktionen gleichgesetzt:

$0{,}5x + 3 = 0{,}5x + 4 \mid - 0{,}5x$
$3 = 4$

Es entsteht eine falsche Aussage. Das lässt sich mithilfe eines Ungleichzeichens verdeutlichen:

$3 \neq 4$

LGS mit unendlich vielen Lösungen

Das folgende LGS soll gelöst werden.

I. $x_2 = 2x_1 + 1$

II. $2x_2 - 2 = 4x_1$

Da die erste Gleichung nach x_2 umgestellt ist, bietet sich die rechnerische Lösung mit dem Einsetzungsverfahren an:

$2 \cdot (2x_1 + 1) - 2 = 4x_1$ | Klammer auflösen

$4x_1 + 2 - 2 = 4x_1$ | zusammenfassen

$4x_1 = 4x_1$ | $- 4x_1$

$0 = 0$

Auf beiden Seiten der Gleichung steht das Gleiche. Diese Aussage ist unabhängig von x_1 wahr. Somit lässt sich die Gleichung nicht eindeutig lösen. Ein solches Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen. Die Lösungsmenge wird in Abhängigkeit einer der beiden Varablen angegeben:

$L = \{x_1; 2x_1 + 1\}$

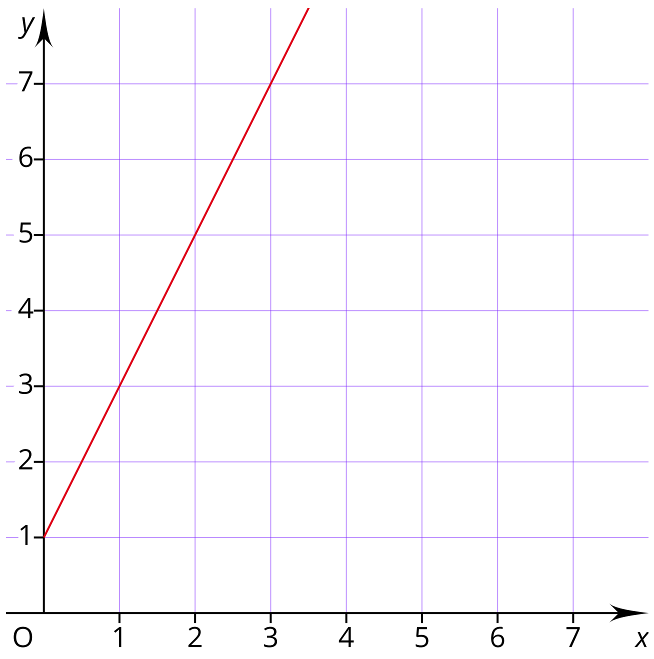
Ein Umstellen von Gleichung II nach x_2 bestätigt das Ergebnis:

$2x_2 - 2 = 4x_1$ | $+ 2$

$2x_2 = 4x_1 + 2$ | $: 2$

$x_2 = 2x_1 + 1$

Die Gleichungen I und II sind identisch. Sie lassen sich durch Umstellen ineinander überführen. Eine zeichnerische Lösung enthält daher nur eine lineare Funktion:



Mögliche Lösungen für das LGS sind alle Punkte, die auf dieser Geraden liegen, wie zum Beispiel $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$ oder $x_1 = 3$ und $x_2 = 7$.