

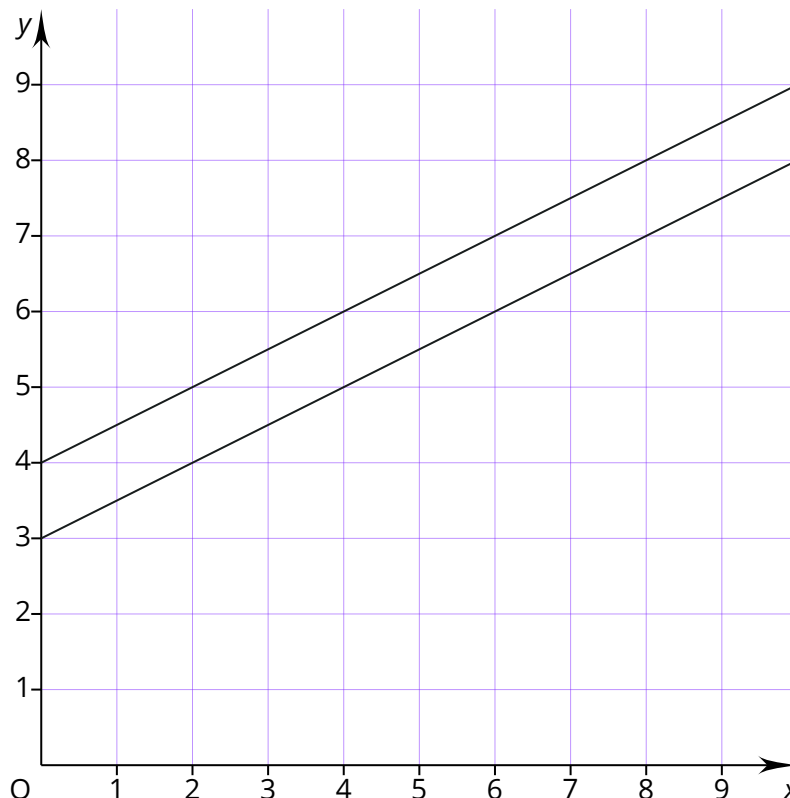
LGS mit keiner Lösung

Die folgenden Funktionen gehören zu einem LGS:

I. $y = 0,5x + 3$

II. $y = 0,5x + 4$

Die Funktionen werden in ein Koordinatensystem eingezeichnet:



In der Zeichnung ist erkennbar, dass die beiden linearen Funktionen parallel verlaufen. Sie haben somit keinen Schnittpunkt. Das Gleichungssystem hat keine Lösung. Das wird durch eine leere Lösungsmenge verdeutlicht:

$$L = \{ \}$$

Dieses Ergebnis lässt sich auch rechnerisch zeigen. Beim Gleichsetzungsverfahren werden die Funktionen gleichgesetzt:

$$\begin{aligned} 0,5x + 3 &= 0,5x + 4 \quad | -0,5x \\ 3 &= 4 \end{aligned}$$

Es entsteht eine falsche Aussage. Das lässt sich mithilfe eines Ungleichzeichens verdeutlichen:

$$3 \neq 4$$

LGS mit unendlich vielen Lösungen

Das folgende LGS soll gelöst werden.

I. $x_2 = 2x_1 + 1$

II. $2x_2 - 2 = 4x_1$

Da die erste Gleichung nach x_2 umgestellt ist, bietet sich die rechnerische Lösung mit dem Einsetzungsverfahren an:

$$2 \cdot (2x_1 + 1) - 2 = 4x_1 \quad | \text{Klammer auflösen}$$

$$4x_1 + 2 - 2 = 4x_1 \quad | \text{zusammenfassen}$$

$$4x_1 = 4x_1 \quad | -4x_1$$

$$0 = 0$$

Auf beiden Seiten der Gleichung steht das Gleiche. Diese Aussage ist unabhängig von x_1 wahr. Somit lässt sich die Gleichung nicht eindeutig lösen. Ein solches Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen. Die Lösungsmenge wird in Abhängigkeit einer der beiden Variablen angegeben:

$$L = \{x_1; 2x_1 + 1\}$$

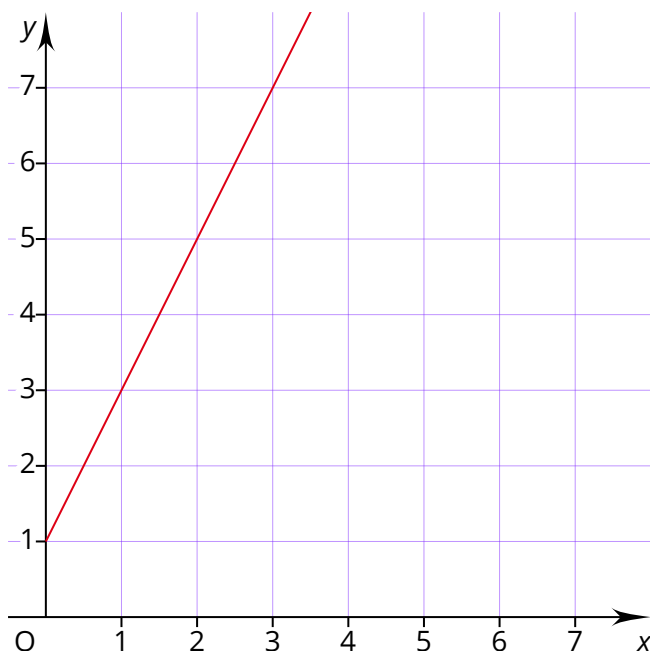
Ein Umstellen von Gleichung II nach x_2 bestätigt das Ergebnis:

$$2x_2 - 2 = 4x_1 \quad | +2$$

$$2x_2 = 4x_1 + 2 \quad | :2$$

$$x_2 = 2x_1 + 1$$

Die Gleichungen I und II sind identisch. Sie lassen sich durch Umstellen ineinander überführen. Eine zeichnerische Lösung enthält daher nur eine lineare Funktion:



Mögliche Lösungen für das LGS sind alle Punkte, die auf dieser Geraden liegen, wie zum Beispiel $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$ oder $x_1 = 3$ und $x_2 = 7$.