

INPUT: Spurpunkte und Spurgeraden

Mathematik Vektoren 12

➡ Arbeitsauftrag

Erarbeite dir die Rechenregeln zu Spurpunkten und Spurgeraden, indem du die Aufgaben löst. Wenn du nicht weiter kommst, findest du die Lösung am Ende des Dokuments.

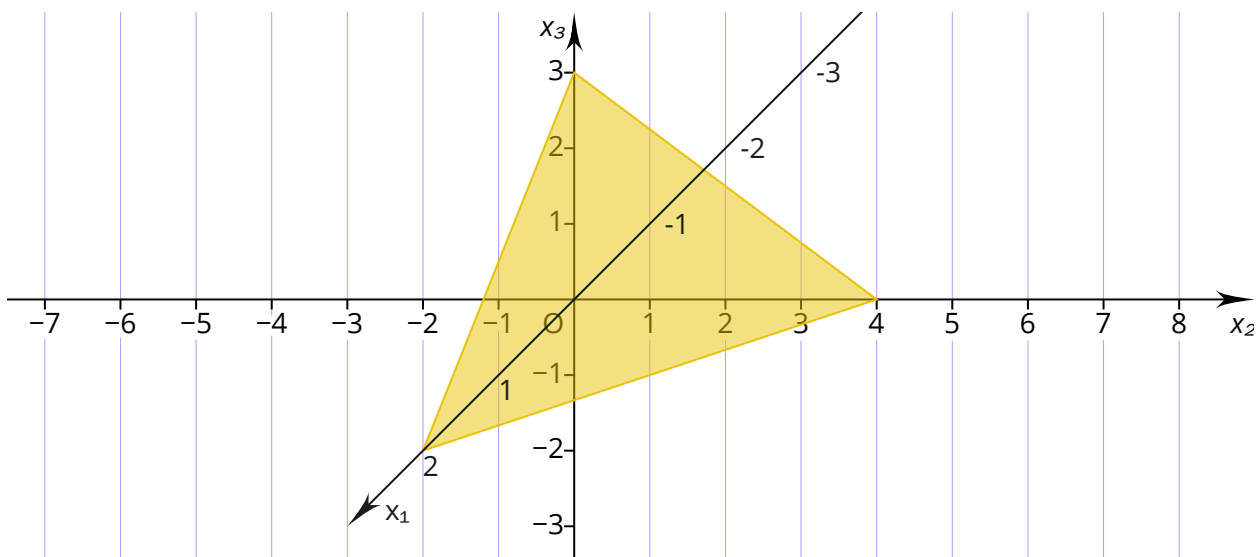
Beispielaufgabe

Gegeben ist die Ebene $E: 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12$.

Ermittle die Spurpunkte und die Spurgeraden der Ebene E .

Was sind Spurpunkte?

Als Spurpunkte werden die Schnittpunkte einer Ebene mit den Koordinatenachsen bezeichnet. Die Spurpunkte der Ebene in der Abbildung sind $S_{x_1}(2|0|0)$, $S_{x_2}(0|4|0)$ und $S_{x_3}(0|0|3)$.



- ① Im Kasten wird der Spurpunkt der Ebene an der x_1 -Achse S_{x_1} rechnerisch ermittelt. Erläutere das Vorgehen.

✎ Spurpunkt S_{x_1} der Ebene E

(1) $x_2 = 0, x_3 = 0$

(2) $6 \cdot x_1 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 12$
 $\Rightarrow x_1 = 2$

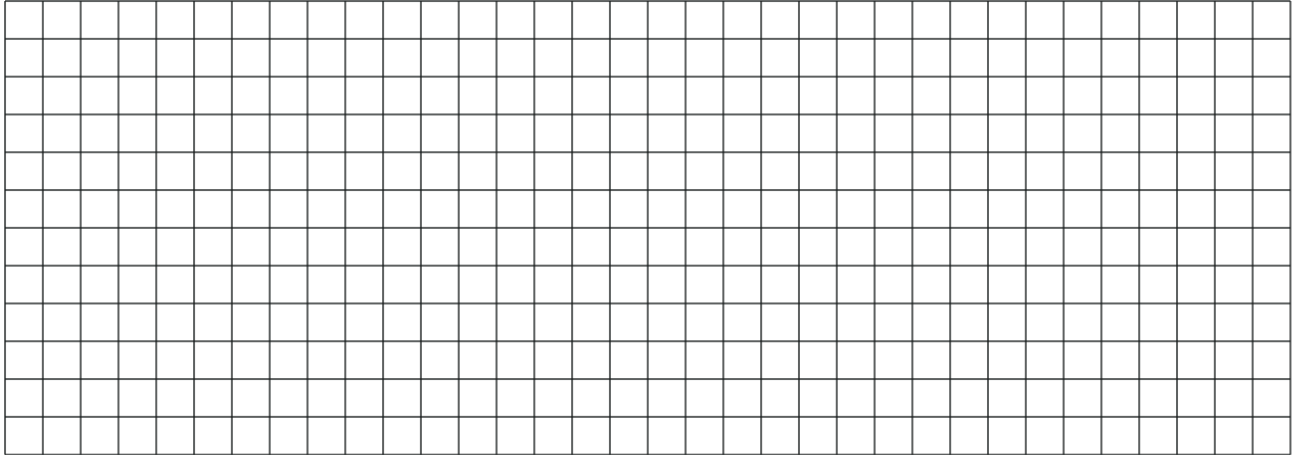
(3) $S_{x_1}(2|0|0)$



INPUT: Spurpunkte und Spurgeraden

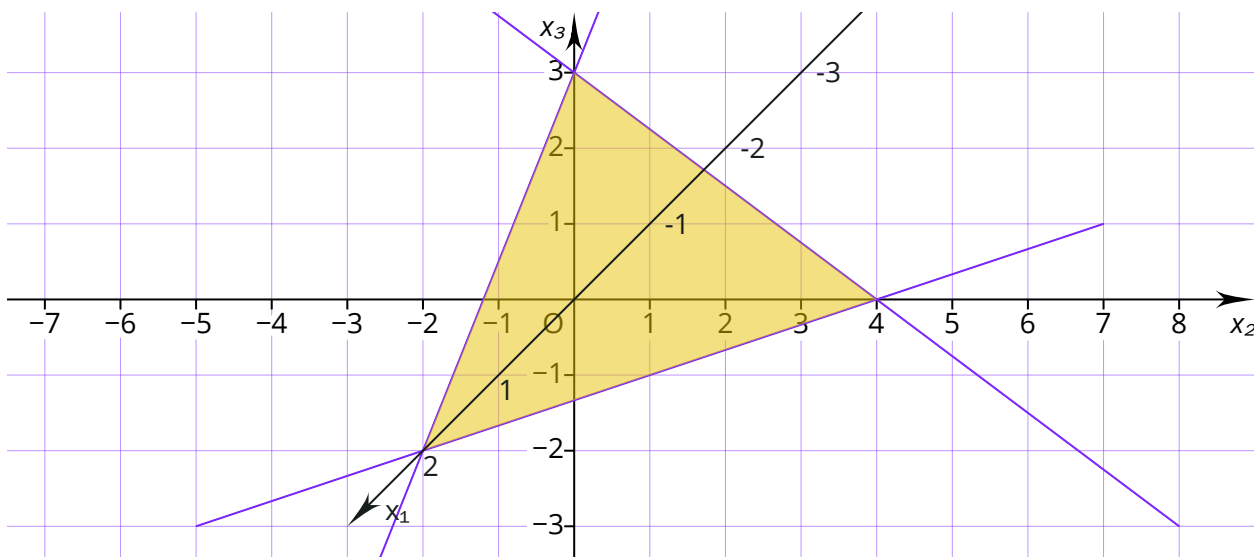
Mathematik Vektoren 12

- ② Berechne die beiden anderen Spurpunkte S_{x_2} und S_{x_3} der in der Beispielaufgabe angegebenen Ebene.



Was sind Spurgeraden?

Spurgeraden sind die Schnittgeraden einer Ebene mit den Koordinatenebenen.



- ③ Im Kasten wird die Spurgerade der Ebene in der x_1x_2 -Ebene rechnerisch ermittelt. Erläutere das Vorgehen.

 Spurgerade $g_{x_1x_2}$ der Ebene E

$$g_{x_1x_2}: \vec{x} = \vec{s}_{x_1} + r \cdot \overrightarrow{S_{x_1}S_{x_2}}$$

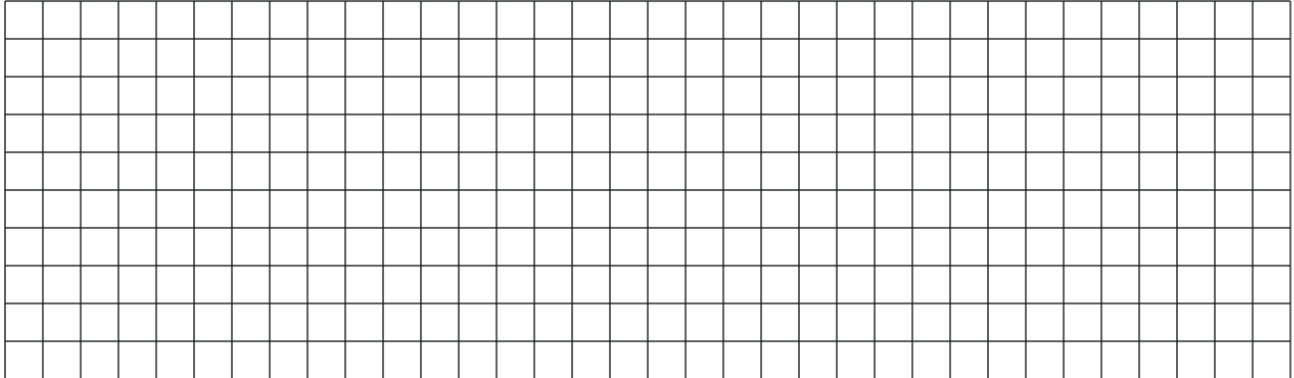
$$g_{x_1x_2}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$



INPUT: Spurpunkte und Spurgeraden

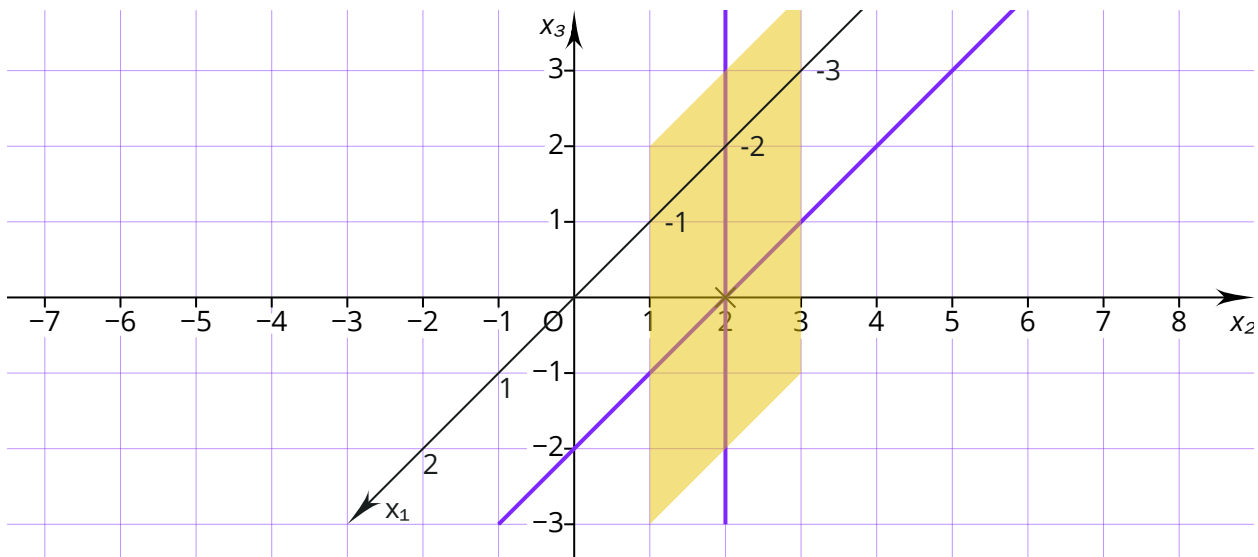
Mathematik Vektoren 12

- ④ Berechne die beiden anderen Spurpunkte S_{x_2} und S_{x_3} der in der Beispielaufgabe angegebenen Ebene.



Haben alle Ebenen Spurpunkte und Spurgeraden?

Die in der Beispielaufgabe gezeigte Ebene hat drei Spurpunkte und drei Spurgeraden. Es gibt jedoch auch Ebenen, die weniger Spurpunkte und Spurgeraden haben. Das ist zum Beispiel dann der Fall, wenn eine Ebene parallel zu einer Koordinatenebene verläuft.



Die Abbildung zeigt die Ebene $E : x_2 = 2$. Die Koordinatengleichung dieser Ebene ist so kurz, da sowohl n_1 als auch n_3 null sind. Diese Ebene verläuft parallel zur x_1x_3 -Ebene. Sie schneidet die x_1 -Achse und die x_3 -Achse nie und hat daher nur einen Spurpunkt mit der x_2 -Achse. Die Ebene hat auch nur zwei Spurgeraden. Sie liegen in der x_1x_2 -Ebene und in der x_2x_3 -Ebene:

$$g_{x_1x_2} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad g_{x_2x_3} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alle Ebenen haben mindestens einen Spurpunkt und zwei Spurgeraden. Es können jedoch maximal drei Spurpunkte und drei Spurgeraden sein.



INPUT: Spurpunkte und Spurgeraden

Mathematik Vektoren 12

Wie lassen sich Ebenen mithilfe von Spurpunkten zeichnen?

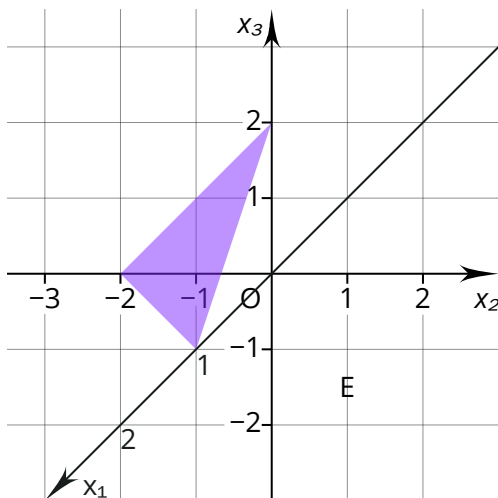
Mithilfe der Spurpunkte können Ebenen leicht gezeichnet werden. Je nachdem, wie viele Spurpunkte eine Ebene hat, ist das Vorgehen ein wenig unterschiedlich.

⑤ Beschreibe, wie die Ebenen gezeichnet wurden.

a) $E: 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4$

Die Ebene hat drei Spurpunkte:

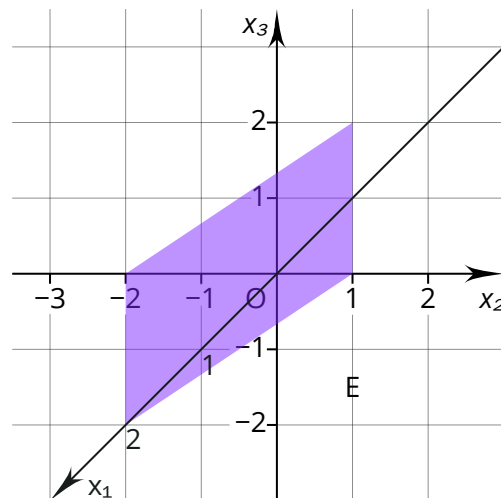
$S_{x_1}(1|0|0)$, $S_{x_2}(0|-2|0)$, $S_{x_3}(0|0|2)$



b) $E: x_1 + 2x_2 = 2$

Die Ebene hat zwei Spurpunkte:

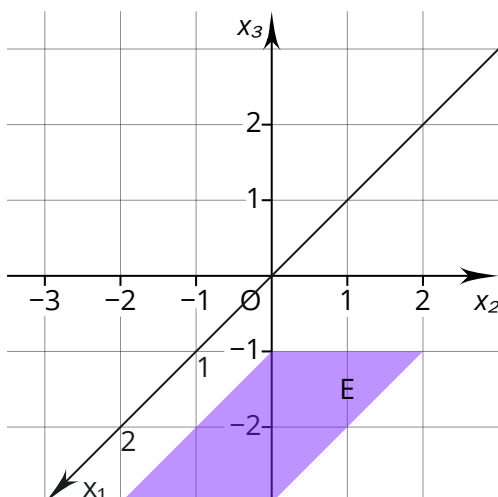
$S_{x_1}(2|0|0)$, $S_{x_2}(0|1|0)$



c) $E: x_3 = -1$

Die Ebene hat einen Spurpunkt:

$S_{x_3}(0|0|-1)$





INPUT: Spurpunkte und Spurgeraden

Mathematik Vektoren 12

Lösung

Aufgabe 1

- (1) Um den Spurpunkt S_{x_1} zu bestimmen, werden x_2 und x_3 null gesetzt.
- (2) Die Werte werden in die Koordinatengleichung eingesetzt. Dann wird die Gleichung nach x_1 umgestellt.
- (3) Der Spurpunkt enthält den berechneten Wert und die für die anderen Koordinaten festgelegten Nullen.

Aufgabe 2

Berechnung von S_{x_2}

- (1) $x_1 = 0, x_3 = 0$
- (2) $6 \cdot 0 + 3 \cdot x_2 + 4 \cdot 0 = 12$
 $\Rightarrow x_2 = 4$
- (3) $S_{x_2}(0|4|0)$

Berechnung von S_{x_3}

- (1) $x_1 = 0, x_2 = 0$
- (2) $6 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot x_3 = 12$
 $\Rightarrow x_3 = 3$
- (3) $S_{x_3}(0|0|3)$

Aufgabe 3

Beim Aufstellen der Spurgerade dient der Ortsvektor eines Spurpunktes als Stützvektor und der Verbindungsvektor zu einem zweiten Spurpunkt als Richtungsvektor.

Aufgabe 4

Spurgerade in der x_2x_3 -Ebene

$$g_{x_2x_3}: \vec{x} = \vec{s_{x_2}} + r \cdot \overrightarrow{S_{x_2}S_{x_3}}$$
$$g_{x_2x_3}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Spurgerade in der x_1x_3 -Ebene

$$g_{x_1x_3}: \vec{x} = \vec{s_{x_1}} + r \cdot \overrightarrow{S_{x_1}S_{x_3}}$$
$$g_{x_1x_3}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5

- a) Hat eine Ebene drei Spurpunkte, werden diese eingezeichnet und verbunden.
- b) Bei einer Ebene mit zwei Spurpunkten werden diese eingezeichnet und von dort Parallelen zu der Achse gezeichnet, die keinen Spurpunkt hat.
- c) Hat eine Ebene nur einen Spurpunkt, wird dieser eingezeichnet und von dort aus zwei Parallelen zu den Achsen gezeichnet, die keinen Spurpunkt haben.

