



Arbeitsauftrag

Erarbeite dir die Regeln zum Untersuchen von Funktionen auf Symmetrie, indem du die folgenden Aufgaben bearbeitest. Wenn du nicht weiter kommst, findest du die Lösungen am Ende des Dokuments.

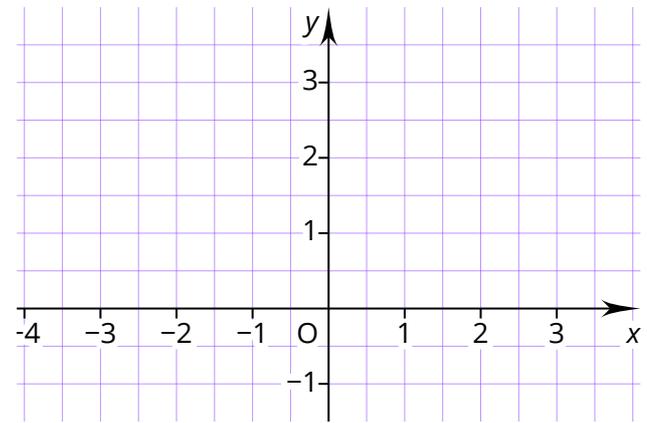
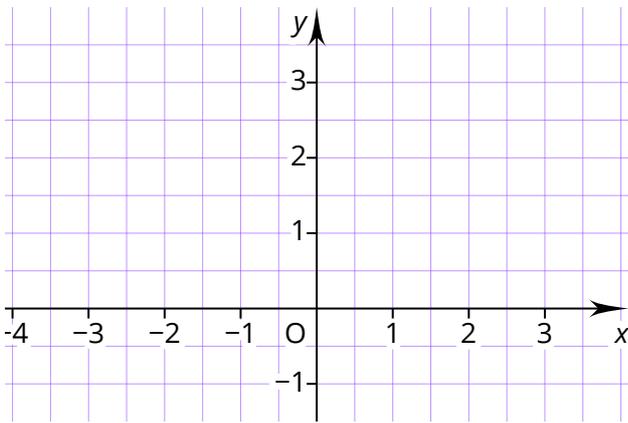
① a) Zeichne die Funktionen. Nutze dazu die Wertetabellen und die Koordinatensysteme.

(1) $f(x) = 0,5x^2 - 1$

(2) $g(x) = -0,125x^4 + x^2 + 1$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)							

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
g(x)							



b) Vergleiche für die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ die Funktionswerte von einer beliebigen Zahl mit dem Funktionswert ihrer Gegenzahl, also zum Beispiel $f(3)$ und $f(-3)$.

c) Beschreibe den Verlauf der Graphen von $f(x)$ und $g(x)$.



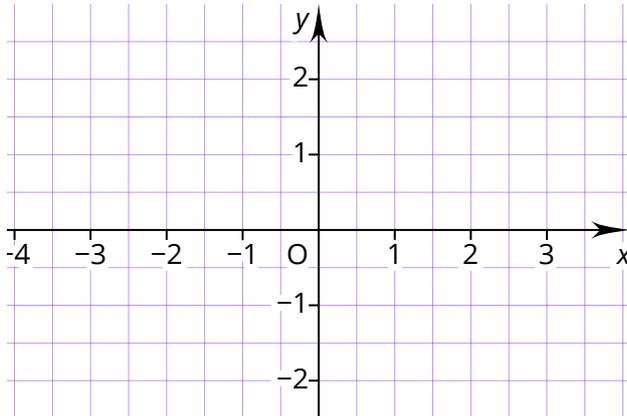
Achsensymmetrie

Funktionen, deren Graphen sich an der y -Achse spiegeln lassen, werden als achsensymmetrisch zur y -Achse bezeichnet. Die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ sind Beispiele für achsensymmetrische Funktionen.

② a) Zeichne die Funktionen. Nutze dazu die Wertetabellen und die Koordinatensysteme.

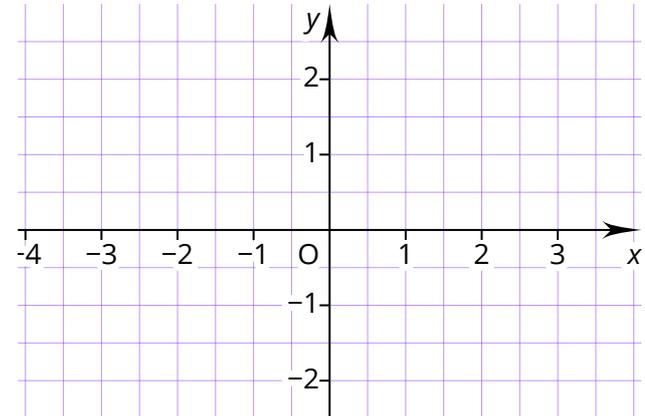
(1) $h(x) = 0,5x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$h(x)$							



(2) $k(x) = -0,125x^3 + 1,5x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$k(x)$							



b) Vergleiche für die Funktionen $h(x)$ und $k(x)$ die Funktionswerte von einer beliebigen Zahl mit dem Funktionswert ihrer Gegenzahl, also zum Beispiel $h(3)$ und $h(-3)$.

c) Beschreibe den Verlauf der Graphen von $h(x)$ und $k(x)$.

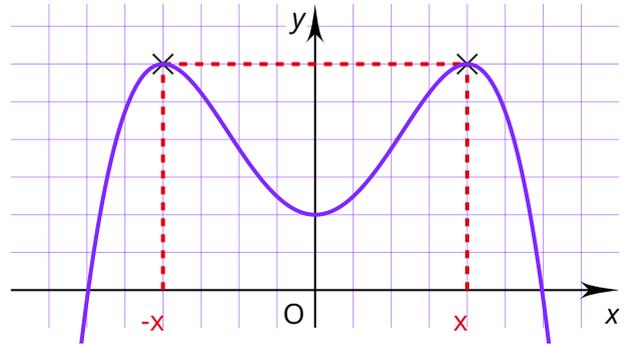
Punktsymmetrie

Funktionen, deren Graphen sich im Punkt $P(0|0)$ spiegeln lassen, werden als punktsymmetrisch zum Ursprung bezeichnet. Die Funktionen $h(x)$ und $k(x)$ sind Beispiele für punktsymmetrische Funktionen.

Wie lässt sich untersuchen, ob eine Funktion symmetrisch ist?

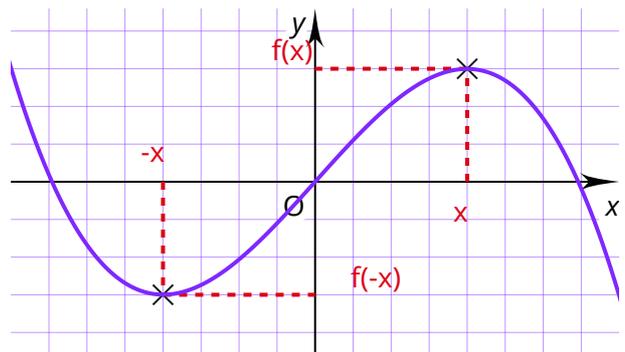
Für alle Funktionen, die achsensymmetrisch zur y -Achse sind, gilt: $f(x) = f(-x)$.

Um zu prüfen, ob eine Funktion achsensymmetrisch ist, wird für x die Gegenzahl $-x$ in die Funktionsgleichung eingesetzt und die Funktionsgleichung vereinfacht. Ergibt sich die ursprüngliche Funktionsgleichung $f(x)$ ist die Funktion achsensymmetrisch zur y -Achse.



Für alle Funktionen, die punktsymmetrisch zum Ursprung sind, gilt: $-f(x) = f(-x)$.

Um zu prüfen, ob eine Funktion punktsymmetrisch ist, wird für x die Gegenzahl $-x$ in die Funktionsgleichung eingesetzt und die Funktionsgleichung vereinfacht. Anschließend wird geprüft, ob die Funktion $-f(x)$ entspricht. Wenn das so ist, ist die Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung.

**Beispielaufgabe**

Untersuche die Funktion auf Symmetrie.

a) $g(x) = -0,125x^4 + x^2 + 1$

b) $k(x) = -0,125x^3 + 1,5x$

Rechenweg

$$\begin{aligned} \text{a) } g(x) &= -0,125x^4 + x^2 + 1 \\ g(-x) &= -0,125(-x)^4 + (-x)^2 + 1 \\ g(-x) &= -0,125x^4 + x^2 + 1 \\ g(x) &= g(-x) \end{aligned}$$

⇒ Die Funktion ist achsensymmetrisch zur y -Achse.

$$\begin{aligned} \text{b) } k(x) &= -0,125x^3 + 1,5x \\ k(-x) &= -0,125(-x)^3 + 1,5(-x) \\ k(-x) &= 0,125x^3 - 1,5x \\ k(x) &\neq k(-x) \end{aligned}$$

$$-k(x) = 0,125x^3 - 1,5x$$

$$-k(x) = k(-x)$$

⇒ Die Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

Das Produkt zweier negativer Zahlen ist positiv, die Minuszeichen heben sich gegenseitig auf:

$$(-x)^2 = (-x) \cdot (-x) = x^2$$

Daraus folgt, dass bei jeder Potenz mit geradem Exponenten das Ergebnis positiv ist:

$$(-x)^4 = x^4$$

$$(-x)^6 = x^6$$

Umgekehrt ist die Potenz einer negativen Zahl mit einem ungeraden Exponenten immer negativ:

$$(-x)^3 = -x^3$$

$$(-x)^5 = -x^5$$

$$2^3 = 8$$

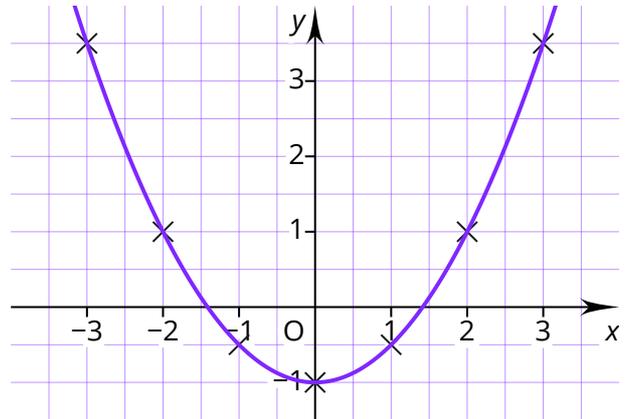
In dieser Aufgabe ist 3 der Exponent und 8 die Potenz.

Lösung

① a)

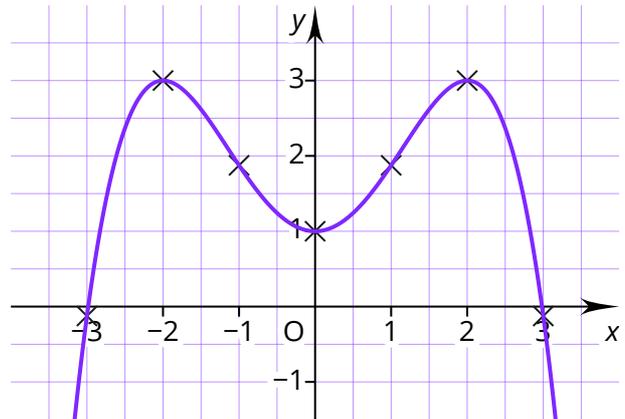
(1)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	3,5	1	-0,5	-1	-0,5	1	3,5



(2)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	$-\frac{1}{8}$	3	$1\frac{7}{8}$	1	$1\frac{7}{8}$	3	$-\frac{1}{8}$



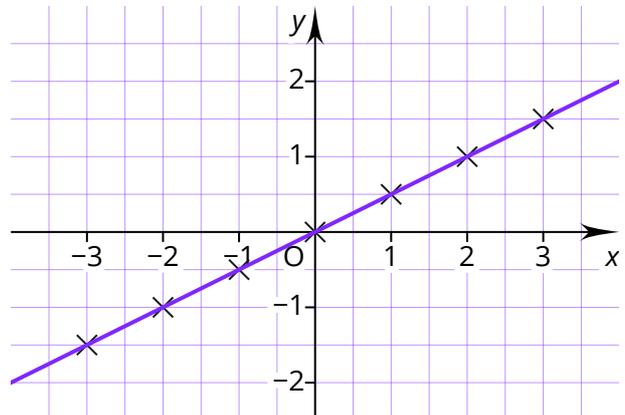
b) Für alle Werte in der Wertetabelle sind die Funktionswerte einer Zahl x und ihrer Gegenzahl $-x$ identisch. Es gilt $f(x) = f(-x)$ sowie $g(x) = g(-x)$.

c) Der Graph von $f(x)$ ist eine nach oben geöffnete, gestauchte Parabel. Sie ist nach unten, aber nicht seitlich verschoben, sodass ihr Scheitelpunkt auf der y -Achse liegt. Der Graph der Funktion $g(x)$ ist nach unten geöffnet. Die Funktion hat zwei Hochpunkte bei $H_1(-2|3)$ und $H_2(2|3)$ sowie einen Tiefpunkt bei $T(0|1)$. Die Funktion ist an der y -Achse gespiegelt.

② a)

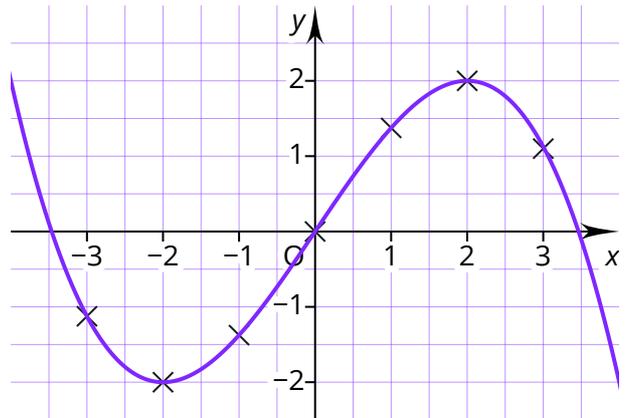
(1)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$h(x)$	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5



(2)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$k(x)$	$-1\frac{1}{8}$	-2	$-1\frac{3}{8}$	0	$1\frac{3}{8}$	2	$1\frac{1}{8}$



b) Für alle Werte in der Wertetabelle sind die Funktionswerte einer Zahl x und ihrer Gegenzahl $-x$ ebenfalls Gegenzahlen. Es gilt $-h(x) = h(-x)$ sowie $-k(x) = k(-x)$.

c) Der Graph von $h(x)$ ist eine Gerade, die durch den Ursprung verläuft. Der Graph der Funktion $k(x)$ hat einen Hochpunkt bei $H(2|2)$ und einen Tiefpunkt bei $T(-2|-2)$ und geht ebenfalls durch den Ursprung.

$$\textcircled{3} \quad f(x) = 2x^3 + x^2$$

$$f(-x) = 2(-x)^3 + (-x)^2$$

$$f(-x) = -2x^3 + x^2$$

$$f(x) \neq f(-x)$$

⇒ Die Funktion ist nicht achsensymmetrisch zur y -Achse.

$$-f(x) = -2x^3 - x^2$$

$$-f(x) \neq f(-x)$$

⇒ Die Funktion ist nicht punktsymmetrisch zum Ursprung.